7. Dinámica de Fluidos

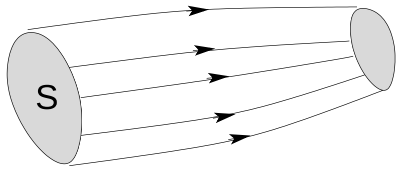
- La dinámica de fluidos estudia los fluidos en movimiento y es una de las ramas más complejas de la mecánica. Aunque cada gota de fluido cumple con las leyes del movimiento de Newton las ecuaciones que describen el movimiento del fluido pueden ser extremadamente complejas. En muchos casos prácticos, sin embargo el comportamiento del fluido se puede representar por modelos ideales sencillos que permiten un análisis detallado.

- En un principio vamos a trabajar con lo que llamaremos *fluido ideal,* es decir un fluido que es incompresible y que no tiene rozamiento interno o viscosidad.

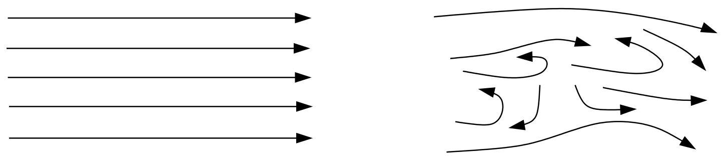
  - La hipótesis de incompresibilidad es un suposición razonable para líquidos pero no para los gases. Un gas puede tratarse como incompresible si su movimiento es tal que las diferencias de presión que aparecen no son demasiado grandes.
  - El rozamiento interno en un fluido da lugar a esfuerzos cortantes cuando dos capas adyacentes se mueven la una sobre la otra o cuando el fluido se mueve por tubos o se encuentra a un obstáculo. En algunos casos estos esfuerzos son despreciables si se comparan con fuerzas gravitatorias o con la originadas por diferencias de presión

- La trayectoria descrita por un elemento de fluido en movimiento se llama **línea de flujo.** La velocidad del elemento varía en magnitud y dirección a lo largo de su línea de flujo. Si cada elemento que pasa por un punto dado sigue la misma línea de flujo que los elementos precedentes se dice que el **flujo es estable o estacionario.** Un flujo puede empezar no estacionario y hacerse estacionario con el tiempo. En un flujo estacionario la velocidad en cada punto del espacio permanece constante en el tiempo aunque la velocidad de la partícula puede cambiar al moverse de un punto a otro.

- **La línea de corriente:** curva, cuya tangente en un punto cualquiera tiene la dirección de la velocidad del fluido en ese punto. En el régimen estacionario las líneas de corriente coinciden con las líneas de flujo. Si dibujamos todas las líneas de corriente que pasan por el contorno de un elemento del fluido de área S (ver dibujo) estas líneas rodean un tubo denominado *tubo de flujo o tubo de corriente.* En virtud de la definición de línea de corriente el fluido no puede atravesar las paredes de un tubo de flujo y en régimen estacionario no puede haber mezcla de fluidos de dos tubos diferentes.



- Se llama **flujo laminar** al tipo de movimiento de un fluido cuando éste es perfectamente ordenado, estratificado, suave, de manera que el fluido se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse. Las capas adyacentes del fluido se deslizan suavemente entre sí. El mecanismo de transporte es exclusivamente molecular. Se dice que este flujo es aerodinámico. Ocurre a velocidades relativamente bajas o viscosidades altas como veremos.
- Se llama **flujo turbulento** cuando se hace más irregular, caótico e impredecible, las partículas se mueven desordenadamente y las trayectorias de las partículas se encuentran formando pequeños remolinos aperiódicos. Aparece a velocidades altas o cuando aparecen obstáculos abruptos en el movimiento del fluido.

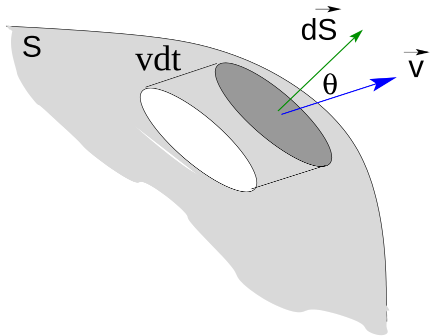


7.1 Ecuación de continuidad

- Es la expresión del principio de conservación de la masa líquida (en ausencia de manantiales y sumideros) $\Rightarrow$ el flujo de masa que pasa a través de una superficie cerrada S debe ser igual a la disminución, por unidad de tiempo, de la masa de fluido contenido en su interior. Formalizaremos este hecho en una ecuación para lo que tenemos que definir el flujo de fluido a través de una superficie.

7.1.1 Flujo y Caudal

- Queremos determinar el ritmo a que fluye la masa de fluido que atraviesa cierta superficie fija S a su paso. Si la velocidad a la que viaja el elemento de fluido es $\vec{v}$ en un tiempo dt, el volumen de fluido que atraviesa una superficie elemental $d\vec{S}$ es $dV = v\,dt\,dS\cos\theta$ (ver dibujo)



y la masa contenida en es volumen es por tanto

$$dm = \rho dV = \rho v\, dt\, dS \cos\theta = \rho dt\, \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- Definimos el flujo másico elemental a través de $d\vec{S}$ como

$$d\Phi = \frac{dm}{dt} = \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- *El flujo másico total o simplemente flujo* será

$$\Phi = \int_S \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- *El flujo volúmico o simplemente caudal* se define como

$$\Psi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

de donde se tiene $\Phi = \rho\Psi$. Vemos que Φ tiene unidades de kg/s o gr/s y que Ψ tiene unidades de m^3/s. Si la superficie es cerrada $\Rightarrow$

$$\Phi = \oint_S \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- También la masa de fluido que hay en un instante t en el interior de la superficie S cerrada es

$$m_{interior} = \int_V \rho dV$$

de donde su variación con el tiempo es

$$\frac{dm_{interior}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

7.1.2 Ecuación de continuidad

- Podemos ya escribir la ecuación de continuidad. De lo dicho más arriba tenemos que

$$\Phi = -\frac{dm_{interior}}{dt} \text{ (Ec. continuidad)}$$

es decir

$$\oint_S \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV \tag{3}$$

que es la *forma integral de la ec. de continuidad.* Por otra parte (como ya hemos visto) en cálculo vectorial se define la divergencia de un vector $\vec{v}$ como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- El *teorema de la divergencia de Gauss* establece que

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = \oint_s \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

que aplicándolo a nuestro caso (3) da

$$\oint_S \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \rho \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV$$

o lo que es lo mismo

$$\int \left[\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0$$

y como esto se ha de cumplir para cualquier volumen arbitrario necesariamente el integrando tiene que ser cero

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

que es la forma diferencial de la ecuación de continuidad. El primer término representa la masa que sale por unidad de tiempo y volumen elemental a través de la superficie de un volumen elemental que contiene a un cierto punto del espacio. El segundo término representa la variación de masa por unidad de tiempo y volumen en dicho volumen elemental.

- Para un flujo estacionario $\partial \rho / \partial t = 0$ de donde la ec de continuidad queda

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

- Para un flujo incompresible $(\rho = cte) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

Ecuación de continuidad para un tubo de corriente

- Sea un tubo de corriente en régimen de flujo estacionario y aplicamos la ec. de continuidad en su forma integral (3) a una parte del tubo comprendida entre dos secciones perpendiculares S_1 y S_2. Como a través de la superficies laterales no hay flujo (pues por definición en cada punto de las mismas la velocidad es tangente a ellas) $\Rightarrow$

$$\oint_S \rho \, \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\rho_1 v_1 S_1 + \rho_2 v_2 S_2 = 0$$
$$\Rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

Si además el fluido es incompresible $\rho = cte$

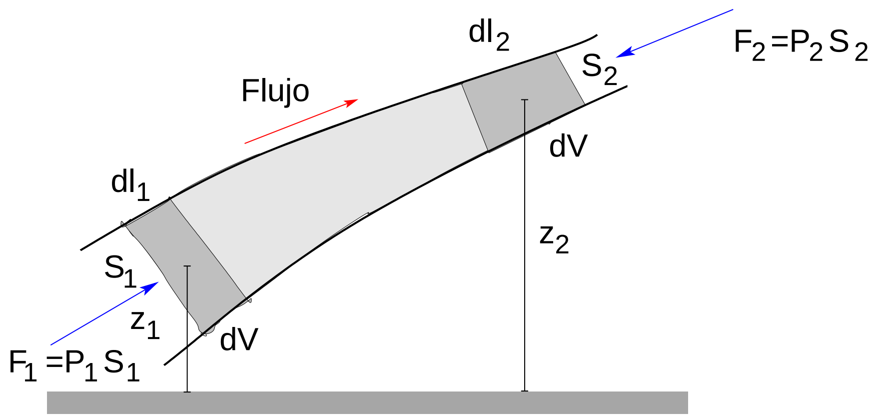
$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

- expresa la constancia del flujo de volumen o caudal a través de las secciones rectas del tubo de corriente $\Rightarrow$ si la sección del tubo disminuye entonces tiene que aumentar la velocidad (manguera de jardín).

7.2 Ecuación de Bernouilli, aplicaciones

- Ec. cont. $\Rightarrow$ cuando un fluido incompresible se mueve a lo largo de un tubo de flujo horizontal de sección transversal variable su velocidad cambia $\Rightarrow$ aparece una aceleración y por lo tanto un fuerza responsable de esta aceleración. El origen de esta fuerza son las diferencias de presión alrededor del elemento concreto de fluido (Si P fuera la misma en todas partes, la fuerza neta sobre cada elemento de fluido sería nula) $\Rightarrow$ cuando la sección de tubo de flujo varía la presión debe variar a lo largo del tubo aunque no haya diferencia de altura a lo largo de todo el tubo. Si además hay esta diferencia de altura aparecerá una diferencia de presión adicional relacionada con esta varición.

- *La ec. de Bernouilli relaciona la diferencia de presión entre dos puntos de un tubo de flujo con las variaciones de velocidad y con las variaciones de altura.* Vamos a derivarla



- En un intervalo de tiempo infinitesimal dt el fluido en la parte de abajo del tubo recorre una longitud $dl_1 = v_1 dt$ y en la parte de arriba una longitud $dl_2 = v_2 dt$. En virtud de la ec. de continuidad (y $\times dt$) tenemos que

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow S_1 dl_1 = S_2 dl_2$$

- Trabajo elemental realizado por $\vec{F}$ en este dt en cada extremo: Como $dw = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ y $\vec{F}$ en el extremo de abajo tiene la misma dirección que $d\vec{l}$ y en el de arriba tiene dirección contraria al desplazamiento $\Rightarrow$

$$dw = dw_1 + dw_2 = F_1 dl_1 - F_2 dl_2 = P_1 S_1 dl_1 - P_2 S_2 dl_2 = (P_1 - P_2) dV$$

Igualamos este trabajo con la variación total de energía, cinética y potencial, es decir $dw = dE_c + dU$:

$$dE_c = E_c^2 - E_c^1 = \frac{1}{2} dm_2 v_2^2 - \frac{1}{2} dm_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$

donde hemos usado que $\rho = cte$. Por otra parte la varición de energía potencial es debida a la diferencia de alturas es decir

$$dU = m_2 g z_2 - m_1 g z_1 = \rho dV g (z_2 - z_1)$$

de forma que finalmente nos queda que $dw = dE_c + dU$ implica

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1)$$

o lo que es lo mismo

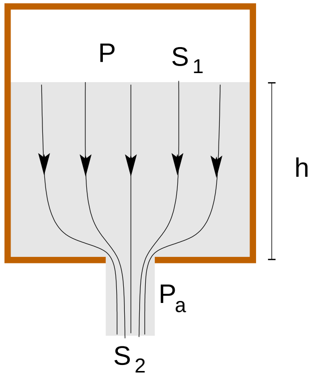
$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = cte$$

a lo largo del tubo de flujo. Las dos últimas expresiones son dos formas equivalentes de la ec. de Bernoulli.

7.2.1 Aplicaciones

- **Hidroestática:** En hidrostática $v = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1)$ ec. que ya conocíamos

- **Velocidad de salida por un horificio en un depósito** (Teorema de Torricelli). Consideremos un depósito cerrado de sección transversal S_1 en cuyo interior hay un fluido de densidad ρ llenándolo hasta una altura h. Por encima de la superficie libre del fluido hay aire a presión P. Además hay un pequeño orificio de sección S_2 por el que escapa el fluido hacia fuerza del depósito.



- Si S_1/S_2 es suficientemente grande o si a medida que el depósito se va vaciando lo vamos rellenando $\Rightarrow$ podemos considerar el fluido en el interior del depósito en situación estacionaria y considerar el volumen total del fluido en movimiento como un único tubo de flujo. Sean v_1 y v_2 las velocidades en la superficie libre del fluido y en el orificio de salida. Aplicando la ec. de Bernouilli a la línea de corriente que conecta ambos puntos

$$P + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = P_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

de donde

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\frac{P - P_a}{\rho} + 2gh$$

pero según la ecuación de continuidad

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$$

de forma que si $S_1 \gg S_2$ o si a medida que el depósito se va vaciando lo vamos rellenando $\Rightarrow v_1 \approx 0$ de donde

$$v_2^2 = 2\frac{P - P_a}{\rho} + 2gh$$

Si el depósito está abierto $P = P_a$ de donde

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

la velocidad de salida es igual a la adquirida por un cuerpo al caer libremente desde una altura h (teorema de Torricelli)

- Si el depósito está cerrado y P es tan grande o ρ es pequeña (como en los gases) de forma que el término $2gh$ se puede despreciar entonces

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P - P_a)}{\rho}} \qquad \text{(Ley de Bunsen)}$$

- A causa de la convergencia de las líneas de corriente en el orificio de salida la sección del chorro continua disminuyendo durante un corto recorrido fuera del depósito hasta que finalmente las líneas de corriente son paralelas entre sí en cuyo momento el chorro tiene una sección S_c que recibe el nombre de *sección contracta o vena contracta.* Se define el coeficiente de contracción como

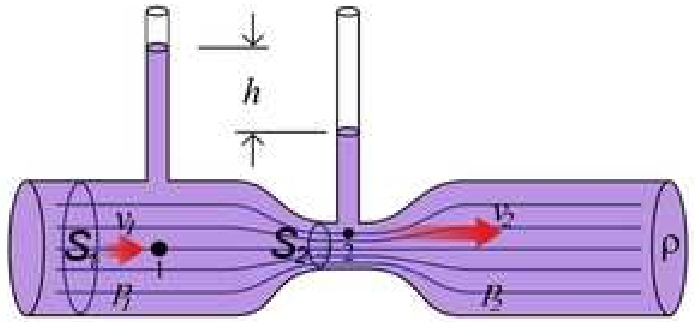
$$C_c = \frac{S_c}{S_2}$$

y se determina experimentalmente.

- Finalmente cuando el fluido sale por el orificio da lugar a un impulso o **fuerza de reacción** sobre el resto del sistema. La masa de fluido que sale en dt es $dm = \rho dV = \rho S_2 v_2 dt$ de donde el momento lineal es $dp = dm\, v_2 = \rho S_2 v_2^2 dt$. Luego en virtud de la 2ª ley de Newton y usando la Ley de Bunsen:

$$F = \frac{dp}{dt} = \rho S_2 v_2^2 = 2S_2(P - P_a)$$

- **Tubo de Venturi.** Consiste en el tubo representado en el dibujo. Es decir un estrechamiento gradual de la sección del tubo y un ensanchamiento también gradual para evitar la turbulencia.

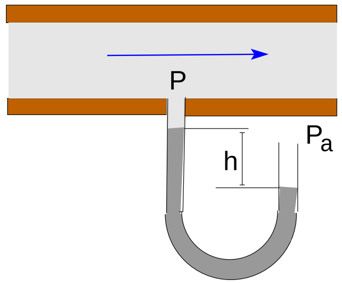


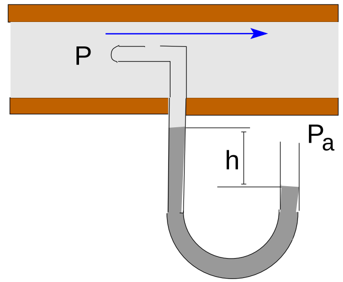
Aplicando la ec. de Bernouilli a la sección ancha antes del estrechamiento y al estrechamiento se tiene

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

según la ec. de continuidad la velocidad v_2 es mayor que la v_1 y por tanto usando la ec. de Bernouilli la presión P_2 en el estrechamiento es menor que la P_1 en la parte más ancha. Conociendo las presiones y las secciones S_1 y S_2 se pueden medir las velocidades (medidor de Venturi).

- **Medida de la presión de un fluido en movimiento.** Se realiza insertando un manómetro como aparece en el dibujo, bien conectado a un orificio en la pared del tubo o introduciendo una sonda en la corriente con la forma adecuada para evitar turbulencias.





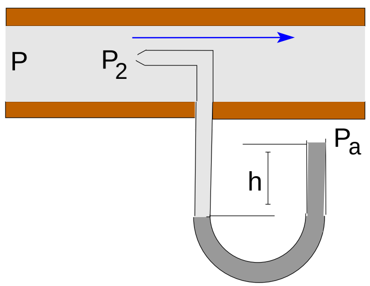
La diferencia de alturas del líquido del manómetro es proporcinal a la diferencia entre la presión atmosférica y la presión en el fluido.

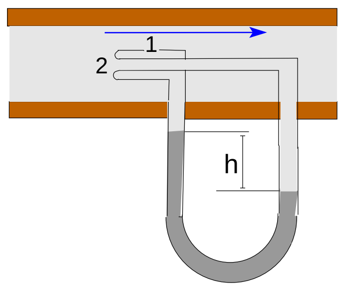
$$P_a - P = \rho_m g h$$

donde ρ_m es la densidad del líquido del manómetro

- **Tubo de Pitot.** Es una sonda con una abertura en el extremo situado contra corriente. En dicha abertura se forma un punto de remanso donde la presión es P_2 y $v_2 = 0$. Aplicando la ec. de Bernouilli entre este punto y un punto distante donde la presión es P y la velocidad es v se tiene

$$P_2 = P + \frac{1}{2}\rho v^2$$





El tubo de Prandtl (derecha) (también se le llama tubo de Pitot) combina los dos efectos anteriores ⇒ compara la presión del fluido en los puntos 1 y 2 (punto de remanso) ⇒

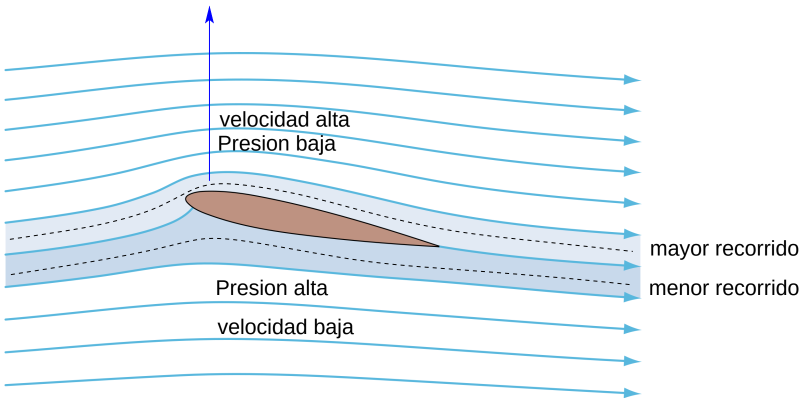
$$P_1 = P_2 - \rho_m g h = P + \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho_m g h$$

pero $P_1 = P$ pues la sección del tubo es la misma en esos dos puntos y están en la misma línea de corriente ⇒

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho_m g h \quad \Rightarrow \text{se puede medir } v \text{ midiendo } h$$

⇒ uso en aviones para medir la velocidad del avión respecto del aire⇒ indicador de vel. del aire.

- **Sustentación.** (Ver dibujo) la posición del ala provoca un aumento de las líneas de flujo encima del ala ⇒ un estrechamiento del tubo de flujo encima del ala y por el principio de Bernouilli hay un aumento de la velocidad y una disminución de la presión encima del ala. Debajo del ala el efecto es el contrario ⇒ disminuye la velocidad y aumenta la presión ⇒fuerza neta hacia arriba o sustentación.

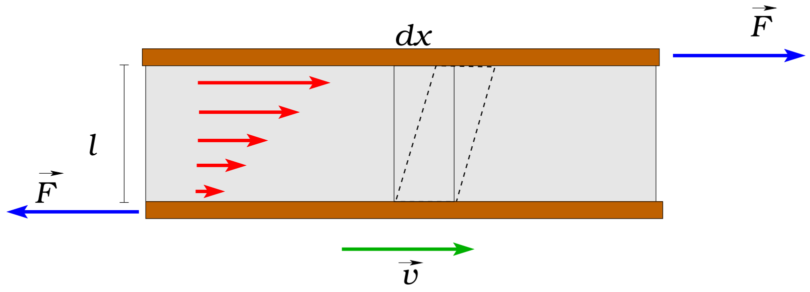


  - Si el ángulo de ataque respecto del flujo aumenta, se crea un flujo turbulento en una región cada vez mayor encima del ala y la caida de presión ya no es tan grande ⇒ la sustentación del ala disminuye y en casos extremos el avión pierde sustentación.

7.3 Viscosidad

- La viscosidad puede considerarse como el rozamiento interno de un fluido. La viscosidad $\Rightarrow$ ejercer fuerza para hacer que una capa líquida se deslice sobre otra. La viscosidad es mayor en líquidos que en gases.

- El problema del movimiento de un fluido viscoso es similar al del esfuerzo cortante y la deformación por cizalladura en un sólido. Dos placas paralelas entre las que hay un fluido con la placa inferior en reposo y la placa superior moviéndose con velocidad $v \Rightarrow$ el fluido en contacto con las placas se mueve con la misma velocidad que ellas. La velocidad de las capas intermedias aumentan uniformemente de una superficie a otra.



- Este tipo de flujo se llama **flujo laminar:** las capas del líquido se deslizan unas sobre otras $\Rightarrow$ una porción de líquido (línea continua) tomará en un instante posterior la forma señalada en el dibujo (línea discontínua) y se deformará cada vez más al continuar el movimiento $\Rightarrow$ aumenta constantemente su deformación por cizalladura. Para mantener la posición de la lámina inferior hay que hacer una fuerza F en sentido contrario.

- Si S es la superficie del fluido sobre la que se aplican las fuerzas, como ya hemos visto antes, existe un *esfuerzo cortante* ejercido sobre el fluido cuyo valor es
$$F/S$$
y su efecto es producir cierto desplazamiento Δx. Sea dt el tiempo en el que el esfuerzo cortante produce un desplazamiento dx. La deformación elemental de cizalladura producida en dt (ver capítulo anterior) es
$$d\gamma = \frac{dx}{l} = \frac{vdt}{l}$$

de donde la variación con el tiempo de la deformación por cizalladura en un fluido es

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v}{l}$$

se le llama también **variación de la deformación,** simplemente.

- El coeficiente de viscosidad de un fluido, o simplemente viscosidad, se define como la razón

$$\eta \equiv \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{variación de la deformación unitaria por cizalladura}} = \frac{F/S}{v/l}$$

o bien

$$F = \eta S \frac{v}{l} \tag{4}$$

- La unidad de viscosidad es en el S.I. $1N\,m\,m^{-2}(ms^{-1})^{-1} = 1N\,s\,m^{-2}$. En el sistema c.g.s la unidad es $1dina\,s\,cm^{-2}$y se donomina *poise*

$$1\,poise = 1\,dina\,s\,cm^{-2} = 10^{-1}N\,s\,m^{-2}$$

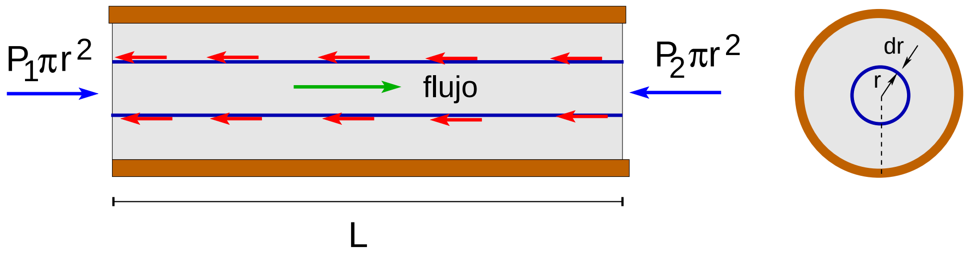
- Hay fluidos donde (4) no se cumple, como ocurre con la sangre donde la velocidad aumenta más rápidamente que la fuerza. P.e. si la fuerza aumenta al doble, la velocidad aumenta a más del doble. Este comportamiento se explica por el hecho de que a escala microscópica la sangre no es un fluido homogéneo sino una suspensión de partículas sólidas en un líquido. Las partículas en suspensión tienen formas característicacas como los glóbulos rojos que tienen forma de disco. A velocidades pequeñas los discos están todos orientados aleatoriamente pero a medida que aumenta la velocidad tienden a orientarse en el mismo sentido para facilitar el flujo. También les pasa lo mismo a los fluidos que lubrican las articulaciones. Los líquidos que satisfacen (4) se llaman líquidos newtonianos.

7.4 Ley de Poiseuille

- Cuando un fluido se mueve en un tubo de sección circular$\Rightarrow$ su velocidad de flujo es diferente en distintos puntos de una misma sección transversal

- La capa más externa se adhiere a las paredes del tubo y su velocidad es cero. La pared del tubo ejerce un arrastre sobre esta capa que a su vez arrastra hacia atrás a la adyacente, etc. Para velocidades no muy grandes el flujo es laminar con una velocidad que es máxima en el centro del tubo y disminuye hasta anularse en las paredes. El flujo es análogo a una serie de tubos o capas coaxiales que se deslizan unas sobre otras, estando la capa o tubo más externo en reposo.

- Consideremos uno de estos tubos de radio r y longitud L (Ver dibujo).



$\Rightarrow$ la fuerza ejercida en los extremos 1 y 2 del tubo es $F_1 = P_1\pi r^2$ y $F_2 = P_2\pi r^2$ donde $P_1 > P_2$ son las presiones en los puntos 1 y 2. La fuerza neta (las fuerzas en los extremos tienen sentidos contrarios) es

$$F = (P_1 - P_2)\pi r^2$$

- Como el elemento de tubo no tiene aceleración dicha fuerza ha de equilibrarse la fuerza de retardo viscoso en la superficie de este elemento que viene dado por la expresión (4), pero dado que la velocidad no varía unifórmemente con la distancia radial debemos sustituir v/l por $-dv/dr$, donde el signo menos indica que la velocidad decrece en la dirección radial desde el centro del tubo $\Rightarrow$

$$F = (P_1 - P_2)\pi r^2 = \eta S\frac{v}{l} = -\eta 2\pi r L\frac{dv}{dr}$$

pues el área sobre la que actúa la fuerza viscosa es $S = 2\pi r L$, de donde tenemos

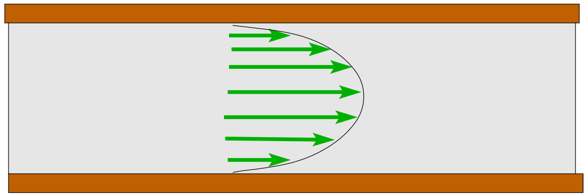
$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}$$

que demuestra que la velocidad decrece cada vez más rápidamente a medida que nos alejamos del centro del tubo ($r = 0$) y nos aproximamos a la pared del conducto ($r = R$).

- Integrando entre un radio r donde la velocidad es v y la pared del conducto donde $v = 0$ se tiene

$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{2\eta L}\int_r^R r dr = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L}(R^2 - r^2) \tag{5}$$

que no es mas que la ecuación de una parábola en r.



$\Rightarrow$ La velocidad máxima ocurre en $r = 0$ (centro del conducto) y es proporcional al cuadrado del radio del conducto y a la varición de presión por unidad de longitud $\Delta P/\Delta L$ (*gradiente de presión*).

- Esta ecuación se puede utilizar para determinar el flujo total por unidad de tiempo del fluido a través del conducto. El volumen de fluido que atraviesa los extremos del elemento de tubo entre r y $r + dr$ en dt es $dV = dSdx = dS\,vdt =$, donde $dS = 2\pi r dr$ (ver dibujo) de donde usando (5) se tiene

$$dV = v2\pi r\,dr\,dt = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}(R^2 - r^2)r\,dr\,dt$$

integrando desde $r = 0$ a $r = R$ se tiene

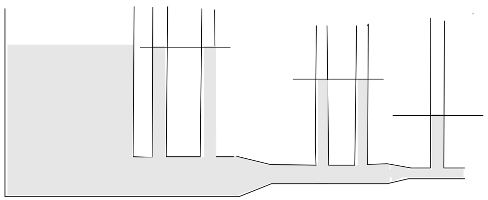
$$dV = \tfrac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2) r\, dr\, dt$$
$$dV = \tfrac{\pi}{8}\tfrac{R^4}{\eta}\tfrac{(P_1 - P_2)}{L} dt$$

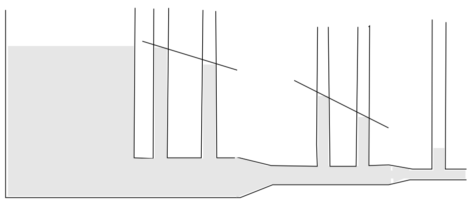
de donde el volumen total de flujo por unidad de tiempo , dV/dt es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{L}$$

relación que se conoce como *Ley de Poiseuille:*

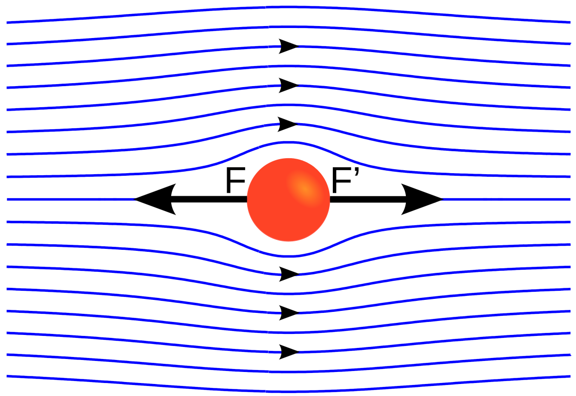
- El volumen de flujo por unidad de tiempo es inversamente proporcional a la viscosidad
- Es proporcional al gradiente de presión a lo largo del conducto.
- Varía con la cuarta potencia del radio del conducto que es esencial p.e. para el diseño de jeringuillas hipodérmicas. El tamaño del orificio de la aguja tiene más importancia que la presión de empuje del dedo a la hora de terminar el flujo por unidad de tiempo que inyecta la aguja. Este mismo mecanismo es el que utilizan los animales de sangre caliente para controlar la temperatura pues el flujo en la sangre en venas y arterias puede controlarse con pequeñas variaciones del diametro de las mismas.
- La diferencia entre el flujo de un fluido no viscoso (ideal) y uno viscoso se ilustra en el dibujo cuando el fluido va atravesando un tubo de sección transversal variable, donde la altura del fluido en los tubos verticales es proporcional a la presión manométrica. En el caso de un fluido viscoso hay un gradiente de presión proporcional a la viscosidad y a dv/dr e inversamente proporcional al radio del tubo.





7.5 Ley de Stokes

- Cuando un objeto esférico se mueve en el seno de un fluido estacionario, o cuando un fluido ideal ($\eta = 0$) se mueve entorno a él, las líneas de corriente forma un modelo perfectamente simétrico entorno a la esfera, con la presión en cualquier punto de la superficie de la esfera situada contra corriente igual a la de cualquier punto de la superficie a favor de la corriente y la fuerza neta sobre la esfera es cero.



- Si el fluido es viscoso habrá un arrastre sobre la esfera. Se puede demostrar que la fuerza viscosa viene dada en función de la viscosidad η, el radio de la esfera r, y su velocidad respecto del fluido v, en la forma

$$F = 6\pi\eta r v$$

que fué derivada por primera vez por sir George Stokes en 1845 y se denomina *Ley de Stokes.*

- Se puede utilizar para determinar la viscosidad de un fluido viendo la velocidad límite v_L que alcanza una esfera que cae en su seno, momento en el cual la fuerza retardadora viscosa más el empuje es igual al peso de la esfera. Si ρ es la densidad de la esfera y ρ' la del fluido el peso de la esfera es

$$w = mg = \rho V g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

y el empuje es $E = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$. Luego la condición de velocidad límite implica

$$6\pi\eta r v_L + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

o lo que es lo mismo

$$v_L = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho')$$

⇒ midiendo la velocidad límite de las esfera, su radio y densidad y sabiendo la densidad del fluido se puede determinar la viscosidad del fluido.

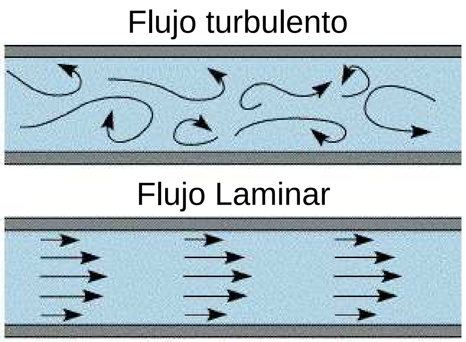
- También conociendo la viscosidad se puede usar para determinar el radio de las partículas, como en el experimento de Millikan de la gota de aceite cargada en caida libre en el aire que se sirvió para determinar la carga del electrón.

- Los biólogos llaman a la velocidad límite **velocidad de sedimentación** y los experimentos con sedimentación pueden suministrar información útil relativa a partículas muy pequeñas.

7.5.1 Número de Reynolds

- Cuando la velocidad de un fluido que se mueve en un tubo sobrepasa un determinado valor crítico (que depende del fluido y del diámetro del tubo) la naturaleza del flujo se hace muy compleja:

  - En la capa cerca de las paredes del tubo, **capa límite,** el flujo sigue siendo *laminar,* de hecho la velocidad del flujo en la capa límite es cero en las paredes y aumenta hacia el centro del tubo.
  - Más allá de la capa límite, el movimiento es muy irregular, originándose corrientes circulares locales aleatorias denominadas *vórtices* que producen un aumento de la resistencia al movimiento. En estas circunstancias el régimen de flujo se llama *turbulento.*



- Los experimentos muestran que el que régimen de flujo sea laminar o turbulento depende de la combinación de cuatro factores que se conococe como **Número de Reynolds**

$$N_R = \frac{\rho v D}{\eta}$$

donde ρ es la densidad del fluido, v su velocidad media, ηla viscosidad y D el diámetro del tubo.

- El número de Reynolds es una cantidad sin dimensiones y tiene el mismo valor numérico en cualquier sistema coherente de unidades. Diversos experimentos han demostrado que para $N_R \lesssim 2000$ el régimen es laminar mientras que para $N_R \gtrsim 3000$ el régimen es turbulento. En la zona entre 2000 y 3000 el régimen es inestable y puede cambiar de laminar a turbulento o viceversa.