La sucesión de Fibonacci

María Isabel Viggiani Rocha

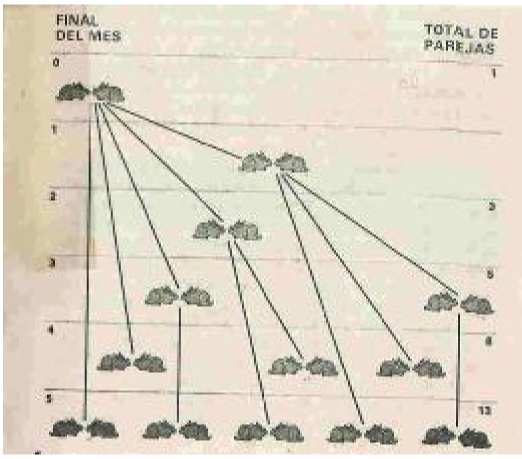
Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ si $n \geq 3$ y $a_1 = a_2 = 1$. Esta sucesión es conocida como **la sucesión de Fibonacci** y la aparición de la misma brota por doquier. Es decir, está en infinidad de ejemplos: tanto en las plantas, como en los animales, en la Física, en la Matemática, etc.

El nombre de esta sucesión se debe al más destacado matemático de la Edad Media: **Leonardo de Pisa**, conocido como Fibonacci (filius Bonacci = hijo de Bonacci), quien nació en 1.179 y murió en la primera mitad del siglo XIII.

El mismo, relata que su padre ocupaba un cargo consular en Argelia y que lo llevó para iniciarlo en los cálculos aritméticos de los árabes pues Leonardo se había educado con la numeración alfabética de los griegos y de los latinos, y con el uso del ábaco. Con los nuevos conocimientos se entusiasmó y viajó a diversos países árabes, recibiendo ahí lecciones de sabios musulmanes. De vuelta a Pisa, compuso 5 obras: la primera de ellas en 1.202, revisada y aumentada en 1.228 es **Liber Abaci** (Libre del Abaco). Con ella introduce el uso del cero en Occidente y presenta al mundo la famosa sucesión mediante un problema referido a los conejos:

"Alguien puso en un corral una pareja de conejos recién nacidos con el propósito de averiguar cuántas parejas habrá al cabo de un año. La prolífica naturaleza de estos animalitos indica que cada pareja recién nacida requiere un mes de maduración, durante el cual no se reproduce, pero al finalizar el segundo mes da a luz una nueva pareja, y luego sigue pariendo cada mes otra pareja. ¿Cuántas parejas habrá al término de un año, suponiendo que ningún conejo muere en esta feliz experiencia?"

La solución es simple. Al empezar tenemos una pareja. Al finalizar el primer mes seguimos con una sola pareja. Al término del segundo mes, el corral ya cuenta con 2 parejas. Al cabo del tercer mes la pareja inicial da a luz otra pareja: ya hay 3 parejas una nueva. Al final del cuarto mes, procrea la pareja inicial y la primogénita: tenemos 5 parejas. Al final del quinto mes: 8 parejas y así sucesivamente. Al culminar el año el corral tendrá 233 parejas de conejos.



A pesar de figurar este problema en el libro, Fibonacci no le prestó mayor atención. Fue recién en el siglo XIX que la llamada sucesión de FIbonacci comenzó a conmover al mundo matemático. El francés **Edouard Lucas** (cuya biografía la R.E.M. publicó en el V8-2 y en los V8-1 y V8-3 aparecieron sendos artículos donde se estudiaba el Teorema de Lucas - R.J.Miatello y M.I.Viggiani Rocha) fue autor de una obra en 4 tomos, de recreaciones matemáticas y le dedicó a esta sucesión un extenso análisis y mostró que la misma es un grifo abierto de curiosidades. En E.E.U.U., desde 1.963, se publica **"The Fibonacci Quarterly"** (revista cuatrimestral), cuya edición está a cargo de la **Fibonacci Association**; esta revista también trata de sucesiones generalizadas de la de Fibonacci y de otras sucesiones análogas (al finalizar este artículo habrá una breve referencia a algunas de ellas).

Conozcamos los primeros 25 términos de esta sucesión:

$a_1=1$	$a_2=1$	$a_3=2$	$a_4=3$	$a_5=5$
$a_6=8$	$a_7=13$	$a_8=21$	$a_9=34$	$a_{10}=55$
$a_{11}=89$	$A_{12}=144$	$a_{13}=233$	$a_{14}=377$	$a_{15}=610$
$a_{16}=987$	$a_{17}=1.597$	$a_{18}=2.584$	$a_{19}=4.181$	$a_{20}=6.765$
$a_{21}=10.946$	$a_{22}=17.711$	$a_{23}=28.657$	$a_{24}=46.368$	$a_{25}=75.025$

La R.E.M. y la sucesión de Fibonacci

La R.E.M. en números anteriores mencionó esta sucesión. Así por ejemplo:
a) V6-3: "Enseñando una Matemática más Novedosa y Divertida" 2ª parte (N. Cosenza, N. Gurruchaga y M.J. Vignoli). En este artículo se comenta un truco con el cual se adivina un número "al estilo Fibonacci", como así también plantea el caso de los

conejos, prueba algunas propiedades de esta sucesión y comenta uno de los vínculos directos entre los coeficientes binomiales y los números de Fibonacci (el cual y otro más serán tratados más adelante).

b) V9-2: "Sucesiones definidas de manera recurrente" (L.Cagliero). En el artículo uno de sus párrafos se refería justamente a la sucesión de Fibonacci.

c) V10-1: "Principio de Inducción" (M.I. Viggiani Rocha y G.P. Ovando). El párrafo VIII trataba sobre esta sucesión, ya que cada número de Fibonacci (cada término de la sucesión dada) puede obtenerse como:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

d) V11-2: "Problemas para resolver" (D. Penazzi) ejercicio 8.

Desarrollo del tema

En este artículo trataré de hacer conocer algunas de las propiedades matemáticas más conocidas, como también distintas aplicaciones en el reino vegetal, en el animal y en la Física.

1- Algunos resultados sobre esta sucesión, los cuales pueden ser verificados por el lector, o cuya demostración se encuentra en el libro Kmuth.

a) Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, obtenemos que: $A^k = \begin{bmatrix} a_{2k-1} & a_{2k} \\ a_{2k} & a_{2k+1} \end{bmatrix}$, $\forall k$.

b) a_n y a_{n+1} son coprimos.

c) $$a_{2n} / a_n = \begin{cases} a_n + 2\, a_{n-1} & n \neq 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

d) $\forall$ m $\in$ N, existe una colección infinita de números de Fibonacci exactamente divisibles por m, cuya aparición ocurre con un período muy bien determinado. Por ejemplo:

$a_n = \dot{m}$,	si $n = \dot{k}$
2	3
3	4
4	6
5	5
6	12
7	8
8	6
9	12

e) Dada un número de Fibonacci (a_n), para calcular el número siguiente (a_{n+1}) no es preciso conocer los dos anteriores, pues $a_{n+1} = \left[\dfrac{a_n + 1 + \sqrt{5}\, a_n}{2} \right]$, [x] = parte entera de

f) $a_n \,.\, a_{n+2} - (a_{n+1})^2 = \pm 1$, (**+** 1 si n es impar, **-** 1 si n es par).

g) $a_{2n+1} = (a_n)^2 + (a_{n+1})^2$

h) $a_n \,.\, a_{n+3} = (a_{n+2})^2 - (a_{n+1})^2$

i) $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+2} - 1$

j) $\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} = a_{2n}$

k) $\sum_{i=1}^{n} a_{2i} = a_{2n+1} - 1$

l) Otra propiedad de la sucesión de Fibonacci, quizás sea la más notable es: la razón entre cada par de números consecutivos va oscilando por encima y por debajo de la razón áurea $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ y conforme se va avanzando en esta sucesión, la diferencia con ésta va haciéndose cada vez menor. Es decir, si definimos una sucesión $\{b_n\}$ por e $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ con n $\geq$ 1, podemos probar que:

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \quad \text{con } n \geq 2 \text{ y entonces deducir} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

m) El Triángulo de Tartaglia o Pascal es rico en curiosidades matemáticas, recordemos que dicho triángulo está construído con los números combinatorios o coeficientes binomiales. Entre ellas:

m i) la suma de los números situados en las diagonales de menor pendiente, forman la sucesión de Fibonacci.

1	1 = **1**
1 1	1 = **1**
1 2 1	1 + 1 = **2**
1 3 3 1	1 + 2 = **3**
1 4 6 4 1	1 + 3 + 1 = **5**
1 5 10 10 5 1	1 + 4 + 3 = **8**
1 6 15 20 15 6 1	1 + 5 + 6 + 1 = **13**

m ii) si excluímos una de las diagonales con los 1s, las sumas de las diagonales de Fibonacci aquellas que originaron cada término de la sucesión son las sumas parciales de la sucesión de Fibonacci. Así si eliminamos **k** diagonales consecutivas y paralelas a las de los 1s incluyendo a ésta, las de Fibonacci dan las sumas parciales de orden **k** de la sucesión de Fibonacci (las sumas parciales de las sumas parciales de orden **k - 1**)

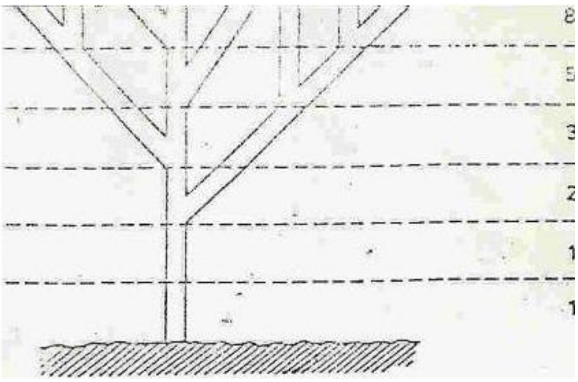
1	
1 1	1 = **1** = 1
1 2 1	1 + 1 = **2** = 2
1 3 3 1	1 + 1 + 2 = **4** = 3 + 1
1 4 6 4 1	1 + 1 + 2 + 3 = **7** = 4 + 3
1 5 10 10 5 1	1 + 1 + 2 + 3 + 5 = **12** = 5 + 6 +1
1 6 15 20 15 6 1	1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = **20** = 6+10 + 4

n) Si consideramos una sucesión $\{c_n\}$ tal que: $c_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, con $n \geq 1$, esta nueva sucesión es también la sucesión de Fibonacci, a partir de a_2. Por lo tanto ¡la sucesión de Fibonacci es una sucesión autogenerante, considerando la salvedad anteriormente mencionada!

2- Algunos ejemplos del reino vegetal son:

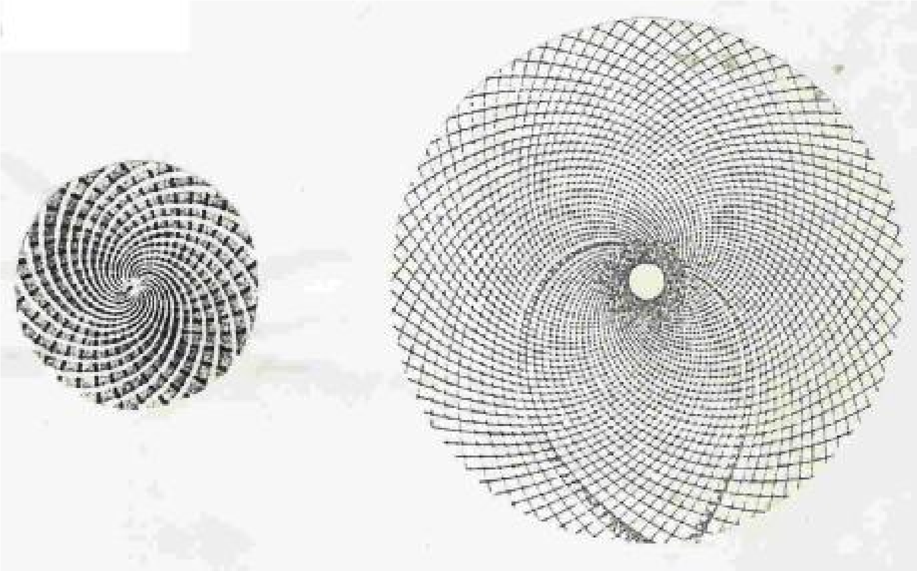
a) La forma en que ciertos árboles van echando sus ramas, nos transporta a nuestra sucesión:

Supongamos un tronco inicial que crece el primer año sin echar ninguna rama, pero que genera una nueva rama al segundo año y cada nuevo año otra rama. Cada rama, a su vez, prosigue con la misma ley. Con el correr de los años, el árbol va produciendo de este modo la sucesión de Fibonacci.



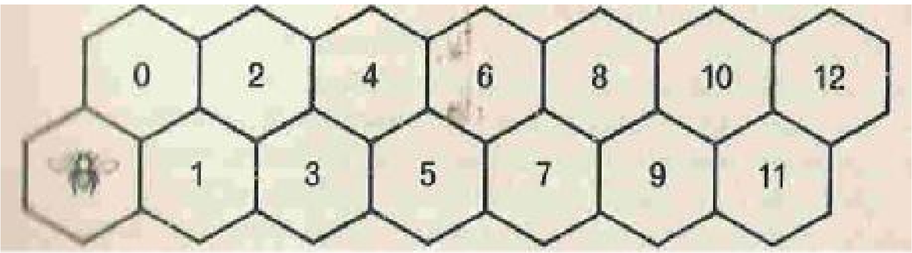
b) También esta sucesión aparece en la implantación espiral de las semillas en ciertas variedades de girasol. Hay en ellas 2 haces de espirales logarítmicas: uno en sentido horario y otro en sentido antihorario. Los números son distintos en cada familia, pero siempre son números de Fibonacci consecutivos. Lo mismo ocurre con los florúsculos de las margaritas.

A continuación observamos 2 esquemas: uno de ellos corresponde a un girasol gigante (con **55** y **89** espirales), el otro a una margarita (**21** y **34**).



c) Con las escamas de las piñas, aparecen **5** espirales en un sentido y **8** en el otro.

3- En el reino animal, además de en la reproducción de los conejos, la sucesión de Fibonacci aparece en distintos ejemplos referentes a abejas:



a) Al contar el número de las distintas rutas que puede seguir una abeja al ir recorriendo las celdillas hexagonales del panal, siempre de una celdilla a una celdilla contigua a la derecha, resulta ser que el número obtenido es un número de Fibonacci (hay **una** sola ruta a la celdilla 0, **2** a la 1, **3** a la 2, **5** a la 3, etc.).

b) Las abejas machos (zánganos) no tienen padre. Cada zángano tiene **madre** (la abeja reina), **2** abuelos (los padres de la madre), **3** bisabuelos (pues el padre de la madre no tuvo padre), **5** tatarabuelos, etc.

```
                          P M        P M P M   Tatarabuelos
                          \_/        \_/ \_/
                       P   M          P   M    Bisabuelos
                       \___/          \___/
                         P              M      Abuelos
                         \______________/
   P                              M            Padres
   \______________________________/
                Z                              Zángano
```

4- En la Física: Dadas 2 láminas de vidrio planas y en contacto, el número de trayectorias de rayos luminosos que inciden sobre ellas va ajustándose a los números de Fibonacci: para **n** reflexiones, hay $\mathbf{a_{n+2}}$ trayectorias posibles.

Algunas generalizaciones de esta sucesión

1- La sucesión de Lucas

Sea la sucesión $\{L_n\}$ definida por: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 3$ con $L_1 = 1$ y $L_2 = 3$

(1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...).

Cada término de la sucesión dada también puede obtenerse como:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

Algunos resultados obtenidos de esta sucesión (los cuales pueden ser verificados por el lector) son por ejemplo:

a) L_n y L_{n+1} son coprimos.

b) $(L_{n+1})^2 - L_n \cdot L_{n+2} = \pm 5$, (+ si n es impar, - si n es par).

c) $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n-2} - 3$

Existen muchas fórmulas sencillas que interrelacionan la sucesión de Fibonacci y la de Lucas:

a) $L_n = a_{n-1} + a_{n+1}$

b) $a_{2n} = a_n \cdot L_n$

c) La ecuación diofántica $5x^2 + 4 = y^2$ sólo tiene soluciones enteras cuando x es un número de Fibonacci e y el correspondiente número de Lucas por ejemplo: $x = a_2 = 1$, $y = L_2 = 3$; $x = a_4 = = 3$, $y = L_4 = 7$. En general (a_n , L_n) es solución.

2- La sucesión de Fitrinacci

Sea la sucesión $\{F_n\}$ definida por: $F_n = F_{n-1} + F_{n-3}$, $n \geq 4$ con $F_1 = F_2 = F_3 = 1$

(1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, ...).

3- La sucesión de Tribonacci.

Sea la sucesión $\{t_n\}$ definida por: $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$, $n \geq 4$ con $t_1 = t_2 = 1$ y $t_3 = 2$

(1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, ...).

Si $u_n = \frac{t_{n+1}}{t_n} \ 1$, $\{u_n\}$ converge hacia la raíz real de $x^3 + x^2 + \ + x - 1 = 0$, cuyo valor es aproximadamente 0,5436890126.

4- La sucesión de Tetranacci.

Sea la sucesión $\{T_n\}$ definida por: $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} + \ + T_{n-4}$, $n \geq 5$ con $T_1 = T_2 = 1$, $T_3 = 2$ y $T_4 = 4$

(1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, ...) .

Bibliografía

* R.E.M. : # V 6-3 (1.991)
  # V 8-1 , 2 y 3 (1.993)
  # V 9-2 (1.994)
  # V 10-1 (1.995)
  # V 11-2 (1.996) .

* Curso "Ecuaciones Diofánticas", dictado por el Dr. José Araujo en Octubre'95 en Universidad Nacional de Tucumán.

* Kmuth, P.E. El arte de computar, Vol 1, en español.

* Martin Gardner (Alianza Editorial, Madrid): # Carnaval matemático (1.983)
  # Circo matemático (1.983).
* Colección Científica de LIFE en Español: Matemática (México - 1.968).
* Revista QUID, Tomo 2, Nº 18.

Lic. María Isabel Viggiani Rocha. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología.
Universidad Nacional de Tucumán.