

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA TRIDIMENSIONAL DO TEOREMA CINEMÁTICO DA ANÁLISE LIMITE

Tese apresentada à Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade Nova de Lisboa (FCT-UNL)
para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil
na especialidade de Estruturas

MÁRIO JORGE VICENTE DA SILVA
Mestre em Engenharia de Estruturas

Orientador Científico
**PROFESSOR DOUTOR ARMANDO MANUEL SEQUEIRA
NUNES ANTÃO**

Lisboa, 2009

Aos meus pais.

Resumo

A Análise Limite tem vindo a demonstrar um vasto potencial para o desenvolvimento de modelos numéricos que permitam a determinação da máxima carga suportada por uma estrutura caracterizada por um comportamento plástico.

Neste trabalho é proposta uma formulação que, baseada no Teorema Cinemático da Análise Limite, visa o cálculo de limites superiores estritos de cargas de colapso. O campo das velocidades é aproximado através de funções nodais lineares ou quadráticas, utilizando-se uma outra aproximação local, independente da primeira, para aproximar o campo da taxa de deformação no domínio de cada elemento. A compatibilidade entre os campos aproximados é estabelecida com o recurso ao método do Lagrangeano Aumentado. A utilização simultânea desta duas aproximações confere à formulação a denominação de Mista. A abordagem descrita origina um problema de otimização, o qual é resolvido através de uma variante do algoritmo iterativo de Uzawa.

Propõe-se ainda uma variante deste modelo, na qual é introduzida uma aproximação adicional na fronteira dos elementos. Esta terceira aproximação interpola a velocidade relativa entre elementos adjacentes, possibilitando a introdução de descontinuidades na formulação e conferindo-lhe uma característica híbrida e mista. É ainda estudado um modo alternativo de introdução de descontinuidades no modelo com base num agrupamento de elementos degenerados de espessura nula.

Explorando características inerentes ao algoritmo iterativo utilizado, recorre-se a técnicas de processamento paralelo de modo a conferir à implementação do modelo elevadas capacidades de cálculo. O modelo desenvolvido revela uma grande versatilidade permitindo obter estimativas de elevada qualidade para um vasto conjunto de problemas, não só bidimensionais mas também tridimensionais, contemplando diversos tipos de materiais com diferentes critérios de cedência.

Abstract

Limit Analysis Theorems has revealed to be a powerful tool for the development of numerical models aiming the determination of the load bearing capacity of structures reached by plastic collapse.

This work presents a numerical formulation for the computation of strict upper bounds of the collapse loads of rigid-perfectly plastic mechanical systems, derived within the kinematical theorem framework. The developed formulation is derived using two simultaneous and independent field approximations, one for the velocity field and the other for strain rate field. Hence the formulation is denoted as Mixed. To enforce the compatibility between the two approximated fields, the augmented Lagrangian method is used. The outcome of this approach is a non-linear minimization problem, which is solved using a variant of the Uzawa's minimization algorithm with relaxation.

A variant of this model, using a third independent approximation field at the elements boundaries, is also presented. The latter approximation deals with the relative velocity field and enables the introduction of discontinuities on the formulation. This new discontinuous upper bound formulation is considered to be an Hybrid-Mixed model. As an alternative, discontinuities can be introduced in the model resorting to a patch of degenerated elements with a null thickness.

It is shown that the intrinsic characteristics of the adopted minimization algorithm are proved to be suitable to adapt it to an efficient parallelization scheme. By adopting this parallel processing approach it is possible to solve very large problems which normally exceed the memory capacities of a single computer. The developed numerical tool reveals to be robust and versatile, able to solve a wide range of both 2D and 3D problems and to handle several type of materials characterized by different yielding criteria.

Palavras Chave

Análise Limite
Teorema cinemático
Lagrangeano Aumentado
Elementos Finitos
Modelo Misto

Keywords

Limit Analysis
Kinematic (Upper Bound) Theorem
Augmented Lagrangian
Finite elements
Mixed model

Agradecimentos

A realização desta tese foi parcialmente financiada pela Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma Bolsa de Doutoramento. Foi ainda inserida no projecto de investigação PTDC/ECM/70368/2006.

Não me seria possível conceber a realização desta tese sem o contributo directo ou indirecto que recebi de diversas pessoas, às quais gostaria de expressar o meu agradecimento. Contudo, não posso deixar fazer uma menção especial a algumas dessas pessoas.

Começo por agradecer à pessoa que mais contribuiu para a realização deste trabalho, o Professor Armando Antão, meu orientador científico. Aqui expresso o meu sincero agradecimento por tudo que me ajudou e ensinou ao longo destes 4 anos e por me ter dado a liberdade de experimentar e seguir praticamente todos os caminhos que quis, mesmo aqueles cuja condução ao fracasso era mais previsível. Aprende-se muito a errar! Acima de tudo agradeço a sua amizade.

Às Professoras Paula Amaral e Isabel Correia do Departamento de Matemática, que me deixaram assistir à suas disciplinas de Optimização do Mestrado em Matemática, contribuindo para a minha formação nesta área.

Ao Professor Antonio Capsoni que me recebeu no *Politecnico di Milano* e com quem ainda hoje colaboro.

Agradeço ao Professor Scott Sloan, ao Kristian Krabbenhøft, ao Dorival Pedroso e a todos com quem trabalhei na Universidade de Newcastle. Esta foi sem dúvida uma experiência maravilhosa.

Ao Professor Nuno Guerra pelo apoio e colaboração em trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento desta tese.

Ao André Barbosa, cuja contribuição para este trabalho não pode deixar de ser mencionada, disponibilizando-me muitos artigos a que, de outro modo, dificilmente teria acesso. Agradeço igualmente ao Professor Rocha de Almeida, que tentou aceder sempre que possível a todos os meus pedidos. Ambos deram sem dúvida uma ajuda valiosa.

Agradeço também aos meus colegas e companheiros de gabinete, o Filipe Santos e

o Zé Nuno Varandas, com quem trabalhar é verdadeiramente um prazer.

A todos os meus amigos, e em especial à Xana, ao JP, ao Vitor, que me proporcionaram imprescindíveis horas de descontração que tornaram mais fáceis os períodos difíceis.

Para terminar, não posso deixar de agradecer à minha família. Particularmente aos meus pais, à minha avó, ao André, à Nina e ao Nuno, agradeço o incentivo e carinho que deles sempre recebi. Para finalizar e muito em especial, gostaria de agradecer à Inês por todo o amor e toda a paciência (infinita, nestes últimos meses) que me tem dedicado e pela disponibilidade que sempre demonstrou para reler este trabalho ajudando a detectar e corrigir erros no texto.

Índice

Resumo	i
Abstract	iii
Palavras Chave	v
Keywords	v
Agradecimentos	vii
Lista de figuras	xv
Lista de tabelas	xix
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objectivo	3
1.3 Metodologia	4
1.4 Notação	5
1.5 Organização do documento	6
1.6 Nota final	7

2	Definição do Problema	9
2.1	Considerações iniciais	9
2.2	Revisão de conceitos da Teoria da Plasticidade	10
2.2.1	Princípio do trabalho plástico máximo	12
2.2.2	Escoamento plástico	14
2.2.2.1	Descontinuidades no campo de velocidades	16
2.2.3	Funções de dissipação	16
2.2.3.1	Critério de Tresca	16
2.2.3.2	Critério de von Mises	18
2.2.3.3	Critério de Mohr-Coulomb	18
2.2.3.4	Critério de Drucker-Prager	19
2.2.3.5	Dissipação em superfícies de escorregamento	19
2.3	Análise Limite	21
2.4	Definição do problema	26
2.5	Considerações finais	26
3	Revisão bibliográfica	29
3.1	Formulações de limite superior	31
3.2	Formulações de limite inferior	33
3.3	Descontinuidades	34
3.4	Adaptividade	34
4	Formulação de elementos finitos	37
4.1	Introdução	37

4.2	Formulação inicial	38
4.2.1	Modelo Misto de Elementos Finitos	41
4.2.2	Algoritmo de programação matemática	43
4.2.2.1	Minimização global (<i>FASE 1</i>)	44
4.2.2.2	Minimização local (<i>FASE 2</i>)	45
4.2.3	Observações finais sobre a formulação inicial	48
4.2.3.1	Majorantes rigorosos de cargas de colapso	48
4.2.3.2	Problemas de <i>locking</i>	48
4.2.3.3	Determinação de cargas de colapso	49
4.3	Formulação dual do modelo inicial	52
4.3.1	Estratégia de resolução do problema dual	56
4.4	Formulação proposta	58
4.4.1	Normalização do trabalho do carregamento variável	59
4.4.2	Formulação forte e elementos quadráticos	62
4.4.2.1	Funções de aproximação	64
4.4.2.2	Minimização Global	65
4.4.2.3	Minimização Local	67
4.4.3	Descontinuidades no campo de velocidades	68
4.4.3.1	Elementos degenerados	68
4.4.3.2	Formulação Híbrida/Mista	72
4.4.4	Modificações do algoritmo de Uzawa	76
5	Implementação numérica	81
5.1	Introdução	81

5.2	Minimização global	82
5.3	Estratégias de minimização local	83
5.3.1	Minimização local para o critério de Tresca	84
5.3.1.1	Problemas sólidos 3D	84
5.3.1.2	Problemas de estados planos de deformação	85
5.3.1.3	Introdução de uma trincatura em tracção	86
5.3.2	Minimização local para o critério de von Mises	87
5.3.2.1	Problemas sólidos 3D	87
5.3.2.2	Problemas de estados planos de deformação	89
5.3.2.3	Problemas de estados planos de tensão	89
5.3.3	Minimização local para o critério de Mohr-Coulomb	90
5.3.3.1	Problemas de estados planos de deformação	93
5.3.4	Minimização local para o critério de Drucker-Prager	94
5.3.4.1	Problemas sólidos 3D	94
5.3.4.2	Problemas de estados planos de deformação	96
5.3.5	Minimização local para as descontinuidades	96
5.3.5.1	Materiais friccionais	98
5.3.5.2	Materiais puramente coesivos	101
5.4	Corpos Rígidos	102
5.5	Pós-processamento da solução	104
6	Processamento paralelo	107
6.1	Introdução	107
6.2	Paralelização do algoritmo	108

6.2.1	Considerações iniciais	109
6.2.2	Paradigma <i>Master/Slaves</i>	110
6.3	Resolução do sistema governativo global	113
6.3.1	Método de subestruturação	115
6.3.2	Método de subestruturação recursiva	117
6.3.3	Algoritmo PSPASES	121
6.3.4	Método FETI	122
6.3.4.1	Interpretação do significado físico	127
6.3.4.2	Pormenores da implementação do método	128
7	Aplicações Numéricas	131
7.1	Chapa com furo circular	132
7.1.1	Análise com elementos 2D	133
7.1.2	Análise com elementos 3D	137
7.1.2.1	Descontinuidades	144
7.2	Capacidade de carga de fundações superficiais	148
7.2.1	Sapata circular	149
7.2.2	Sapatas quadrada e rectangular	159
7.2.2.1	Introdução de descontinuidades	168
7.2.3	Análise do desempenho da implementação paralela	171
7.2.3.1	Teste I	172
7.2.3.2	Teste II	173
7.2.3.3	Teste III	178
7.2.3.4	Discussão dos resultados	179

7.3	Ligações de perfis metálicos tubulares	182
7.3.1	Considerações iniciais	182
7.3.2	Análise de duas ligações tubulares em K	183
8	Conclusões e desenvolvimentos futuros	193
8.1	Desenvolvimentos futuros	196
8.2	Nota final	198
	Bibliografia	199

Lista de Figuras

2.1	Consequências do PTPM: (a) normalidade; (b)convexidade	13
2.2	Dissipação numa superfície de cedência não estritamente convexa . . .	14
2.3	Representação da lei de escoamento associado	15
2.4	Representação gráfica das superfícies de cedência	17
2.5	Superfície de escorregamento: velocidade relativa	20
2.6	Descontinuidade com o critério de Tresca truncado em tracção	21
2.7	Domínio dos carregamentos admissíveis	22
2.8	Construção da superfície, $g(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$	25
3.1	Malha com elementos orientados em forma de leque	36
4.1	Trajectória de carregamento linear	38
4.2	Algoritmo de pesquisa do parâmetro de carga de colapso óptimo . . .	40
4.3	Variante do algoritmo de Uzawa	44
4.4	Arranjo de elementos 2D e 3D para mitigar o efeito de <i>locking</i>	50
4.5	Decomposição do vector, $\underline{\underline{\mu}}_i$	55
4.6	Elementos degenerados	68
4.7	Modelação de uma descontinuidade linear com elementos degenerados	71

4.8	Fronteira com descontinuidade entre dois elementos adjacentes	73
4.9	Variante final do algoritmo de Uzawa	79
5.1	Isolinhas no referencial (x_1, x_2)	88
5.2	Face de projecção para o critério de Mohr-Coulomb	91
5.3	Espaço das soluções admissíveis	94
5.4	Funções aproximação para descontinuidades 2D	97
5.5	Funções aproximação para descontinuidades 3D	98
5.6	Projecção sobre a superfície do espaço das soluções admissíveis	101
5.7	Graus liberdade de um corpo rígido	103
5.8	Subdivisão de um elemento triangular	105
6.1	Ilustração das estratégias de partição de domínio para 2 subdomínios	111
6.2	Diagrama do algoritmo paralelo	112
6.3	Ilustração da condensação progressiva dos graus de liberdade	118
6.4	Ilustração do método de subestruturação recursiva	119
6.5	Padrão de comunicações e o faseamento da eliminação de fronteiras	121
6.6	Partição do domínio pelo método FETI	124
7.1	Chapa com furo circular	133
7.2	Discretização da chapa com furo circular com elementos 2D	134
7.3	Resultados obtidos para a Malha 1	135
7.4	Tipos de malhas utilizadas na análise 3D	137
7.5	Resultados para o caso de carga $\alpha = 1$	139
7.6	Resultados para o caso de carga $\alpha = \frac{1}{2}$	139

7.7	Resultados para o caso de carga $\alpha = 0$	139
7.8	Relação entre os graus de liberdade globais e locais	141
7.9	Solução 3D para o caso de carga $\alpha = 0$	142
7.10	Evolução da carga de colapso com o tempo, $\alpha = 1$	143
7.11	Evolução da carga de colapso com o tempo, $\alpha = \frac{1}{2}$	143
7.12	Evolução da carga de colapso com o tempo, $\alpha = 0$	143
7.13	Placa com superfície de escorregamento orientada a 45°	146
7.14	Modelo da sapata circular	149
7.15	Malhas tipo para a análise da sapata circular	150
7.16	Evolução do erro da solução para o material Tresca	151
7.17	Evolução do erro da solução para $\phi = 10^\circ$	152
7.18	Evolução do erro da solução para $\phi = 20^\circ$	152
7.19	Evolução do erro da solução para $\phi = 30^\circ$	153
7.20	Evolução do erro da solução para $\phi = 40^\circ$	153
7.21	Ilustração da convergência do algoritmo de Uzawa	155
7.22	Coefficiente de capacidade de carga N_c	157
7.23	Dissipação plástica nas sapatas circulares	158
7.24	Exemplo de malhas tipo	160
7.25	Evolução do valor de N_c com refinamento da malha	161
7.26	Dissipação plástica nas sapatas quadradas e rectangulares	165
7.27	Convergência do algoritmo de Uzawa para as sapatas quadradas	167
7.28	Convergência do algoritmo de Uzawa para as sapatas rectangulares	167
7.29	Identificação da região de elementos com descontinuidades	169

7.30	Mecanismo de colapso com descontinuidades para a sapata quadrada	170
7.31	Teste I - tempo total de cálculo dos algoritmos paralelos	173
7.32	Teste I - <i>Speedup</i> total dos algoritmos paralelos	174
7.33	Teste II - tempo total de cálculo dos algoritmos paralelos	176
7.34	Teste II - <i>Speedup</i> total dos algoritmos paralelos	176
7.35	Teste II - tempo médio por iteração	177
7.36	Teste II - <i>Speedup</i> do tempo médio por iteração	177
7.37	Teste II - consumo de tempo da fase inicial	178
7.38	Representação de uma ligação tubular em K	183
7.39	Malha tipo da ligação tubular em K	185
7.40	Solução da análise do modelo I (a)	187
7.41	Solução da análise do modelo I (b)	188
7.42	Solução da análise do modelo II	189
7.43	Colapso de uma ligação K originado na diagonal comprimida	190
7.44	Influência do parâmetro de penalidade na convergência	191

Lista de Tabelas

4.1	Número de pontos para a imposição da condição de compatibilidade	63
4.2	Resumo das características dos elementos finitos	66
4.3	Pontos para a imposição da condição de compatibilidade na fronteira	75
7.1	Análise 2D da chapa com furo circular	134
7.2	Cargas de colapso para o problema da chapa com furo circular	136
7.3	Resumo das análises com elementos lineares	138
7.4	Resumo das análises com elementos quadráticos	140
7.5	Tempos de cálculo das análise 3D	144
7.6	Malhas com elementos de descontinuidade	147
7.7	Caracterização dos materiais e parâmetros geométricos	150
7.8	Resultados do pós-processamento da solução	154
7.9	Cálculos do coeficiente N_c em paralelo	157
7.10	Análise comparativa dos elementos lineares e quadráticos	161
7.11	Características das malhas utilizadas	162
7.12	Valores dos coeficientes de capacidade de carga	163
7.13	Tempos de cálculo para as sapatas quadradas e rectangulares	168

7.14	Resumo das informações sobre as sapatas com descontinuidades . . .	169
7.15	Número de iterações e solução pelo método de FETI	175
7.16	Resumo de resultados da análise do desempenho paralelo	180
7.17	Caracterização dos ensaios experimentais	184
7.18	Resumo dos valores da análise numérica	186
7.19	Resultados da influência do parâmetro de penalidade inicial	190

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A motivação para o desenvolvimento do presente trabalho de investigação pode ser enquadrada em duas vertentes distintas: a pessoal e a científica.

No aspecto pessoal, a vontade e o entusiasmo em desenvolver investigação na área da Análise Limite surgiu de uma conversa informal com o Professor Armando Antão, orientador científico deste trabalho. Embora fosse um assunto completamente novo para mim, tinha vários pontos de contacto com outros temas que me interessavam, nomeadamente, a utilização e implementação de formulações não convencionais de elementos finitos. Foi o suficiente para despertar o meu interesse pelo tema.

No que concerne à vertente científica, existe um número significativo de aplicações práticas na Engenharia Civil em que é relevante ser-se capaz de avaliar a máxima carga suportada por uma determinada estrutura, denominada de carga de colapso. Em determinadas condições, designadamente quando as estruturas apresentam uma elevada ductilidade e são sujeitas a um tipo de carregamento não cíclico, a utilização dos teoremas de Análise Limite revela-se adequada para o estudo destes problemas.

É neste âmbito que formulações numéricas desenvolvidas com base no quadro teórico da Análise Limite representam invariavelmente uma estratégia eficiente e uma alternativa competitiva às formulações baseadas em métodos de carregamentos incrementais.

A obtenção de um majorante para a carga de colapso recorrendo ao Teorema Cinemático da Análise Limite requer o estabelecimento de um campo de velocidades cinematicamente admissível¹. Se, nesse campo de velocidades, a taxa do trabalho das forças exteriores for superior à potência dissipada plasticamente, esse conjunto de forças não será passível de ser suportado pela estrutura. Pelo contrário, se a relação entre as potências referidas for a inversa, nada se poderá concluir acerca do posicionamento do conjunto de forças em causa relativamente aos carregamentos limites. Estas considerações fazem sobressair a necessidade de, para um dado conjunto de forças, se ser capaz de determinar um campo de velocidades, dito óptimo, que minimize a diferença entre as taxas de energia fornecida e dissipada, por forma a obter o majorante da carga de colapso mais rigoroso possível.

Para a resolução do referido problema de minimização recorre-se usualmente a conceitos e algoritmos provenientes da teoria da programação matemática. Inicialmente, a determinação destes campos de velocidades óptimos era restrita à utilização de mecanismos de formas relativamente simples, mais ou menos intuitivos, e controlados através de um número reduzido de parâmetros sobre os quais era operada a minimização pretendida. Esta estratégia, embora demonstrasse ser capaz de produzir resultados de notória qualidade para determinadas classes de problemas, tem como grande limitação requerer um conhecimento prévio das características do modo de colapso do problema em estudo. Outra desvantagem adicional deste método reside no facto de um tipo de mecanismo que produza bons resultados para um determinado problema não poder ser, em geral, aplicado a problemas análogos com diferentes condições de carregamento e/ou características dos materiais.

Recentemente, tirando partido da grande evolução observada no campo da optimização, aliada ao notável crescimento da tecnologia informática, observa-se a tendência para abandonar a abordagem anterior a favor do desenvolvimento de modelos de elementos finitos capazes de estabelecer automaticamente campos de velocidades óptimos, podendo lidar com problemas cujo número de variáveis de decisão é da ordem das centenas de milhar.

Contudo, no caso dos problemas tridimensionais (3D), verifica-se que a obtenção de estimativas de cargas de colapso de elevada precisão requer a utilização de um número muito elevado de variáveis de decisão, usualmente denominados de graus de

¹No decorrer do Capítulo 2 são estabelecidas com rigor as condições necessárias para garantir a admissibilidade cinemática de um campo de velocidades

liberdade na nomenclatura utilizada na mecânica computacional. Esta necessidade de um número elevado de graus de liberdade conduz, não só a tempos elevados de cálculo, mas também à limitação da qualidade dos resultados obtidos devido ao esgotamento dos recursos de cálculo disponíveis num computador comum. O reduzido número de resultados encontrados na literatura, relativos ao estudo de problemas 3D é, em grande medida, reflexo do comentário anterior.

Este relativo insucesso dos métodos existentes revela que esta não é uma área de investigação que se possa considerar como concluída, havendo ainda que explorar soluções alternativas permitindo ultrapassar as limitações observadas actualmente.

1.2 Objectivo

O objectivo primordial desta tese consiste no desenvolvimento e implementação de uma formulação mista de elementos finitos que permita a determinação rigorosa de majorantes de cargas de colapso de sistemas mecânicos caracterizados por um comportamento perfeitamente plástico. Adicionalmente, pretende-se que esta seja suportada teoricamente pelo Teorema Cinemático da Análise Limite.

Para que este objectivo seja concretizado com sucesso, a ferramenta de cálculo desenvolvida deverá ser capaz de exhibir:

- i. robustez — garantia de convergência da solução para a grande maioria das situações;
- ii. versatilidade — capacidade de modelação e estudo de problemas com topologia, materiais e carregamentos diversos;
- iii. eficiência — tempo de cálculo reduzido, possibilitando a resolução de problemas com um número elevado de graus de liberdade. A resolução de problemas 3D com a sua inerente elevada complexidade confere a este aspecto particular relevância.

Uma vez dispondo da referida ferramenta de cálculo totalmente operacional, torna-se imprescindível proceder à análise de um número variado de problemas, validando e comparando os resultados obtidos com valores anteriormente publicados. Esta tarefa irá permitir aferir o desempenho e capacidades do modelo proposto.

1.3 Metodologia

O quadro teórico estabelecido pela Análise Limite permite o desenvolvimento de modelos numéricos para a determinação de estimativas de cargas de colapso de estruturas, desde que estas últimas satisfaçam determinados requisitos. A aproximação à carga de colapso pode ser feita de modo a garantir a obtenção de um carregamento suportável, conduzindo a um *minorante* da carga de colapso. Neste caso, o modelo é desenvolvido com base no denominado Teorema Estático, e é baseado na procura da carga máxima para a qual é possível obter uma distribuição de esforços equilibrada. Em alternativa, o modelo pode procurar estabelecer uma estimativa do carregamento limite através da determinação do menor carregamento potencialmente não suportável, resultando assim na obtenção de um *majorante* da carga de colapso. Neste caso, o modelo é desenvolvido a partir do Teorema Cinemático. É esta a abordagem aqui adoptada, que resulta da procura de um campo de velocidades (não trivial) cinematicamente admissível que minimize a potência dissipada plasticamente.

As características do problema que se propõe tratar fazem com que este resulte invariavelmente num problema de programação matemática não-linear de uma minimização sujeita a restrições. Uma análise atenta do referido problema de minimização permite concluir que as características não-lineares do mesmo advêm da expressão da dissipação plástica ou da imposição da lei da normalidade do escoamento plástico, ambas directamente afectas ao campo da taxa das deformações. Deste modo, propõe-se a utilização de um modelo de elementos finitos misto que utiliza uma aproximação global para o campo das velocidades e uma aproximação local ao nível de cada elemento para a taxa das deformações.

Para proceder à compatibilização das aproximações adoptadas para os campos cinemáticos é utilizado o método dos multiplicadores de Lagrange, seguindo a estratégia proposta por Glowinski e Le Tallec [47]. Recorrendo a um método iterativo baseado no algoritmo de Uzawa, procede-se à determinação da solução óptima através da resolução sucessiva de problemas de minimização, utilizando alternada e independentemente as variáveis de decisão relativas às aproximações utilizadas para os diferentes campos. Assim, a estratégia aqui delineada permite que a não-linearidade do problema possa ser tratada de um modo simples e expedito, já que afecta, apenas, grandezas locais dos elementos. É ainda estudada a introdução na formulação

de uma aproximação adicional na fronteira dos elementos, utilizada para descrever o campo das velocidades relativas entre elementos adjacentes, e que permite a criação de descontinuidades no modelo.

Adicionalmente, e devido ao custo computacional associado à determinação de estimativas precisas de cargas de colapso para a generalidade dos problemas 3D, explora-se ainda o recurso à utilização de computação paralela.

1.4 Notação

A convenção de Einstein é considerada sempre válida e deve ser utilizada sempre que seja adequada para operar termos com índices mudos e índices livres.

Por razões de conveniência são utilizadas duas notações distintas no decorrer deste trabalho. Assim, no Capítulo 2, adopta-se uma notação tensorial, na qual os caracteres que representam grandezas tensoriais são identificadas através de um sublinhado, cujo número de linhas representa a ordem do tensor. As grandezas escalares são representadas por caracteres em itálico. Desta forma, a , \underline{b} e \underline{c} simbolizariam um escalar, um tensor de 1ª ordem (ou vector) e um tensor de 2ª ordem, respectivamente. Nesta notação, o operador “:” denota o produto contraído (também denominado de contracção dupla) entre dois tensores da mesma ordem; $\underline{a} : \underline{b} = a_{ij}b_{ij}$. Faz-se ainda menção da utilização do operador, $\text{tr}(\cdot)$, que denota o traço de um tensor de 2ª ordem; $\text{tr}(\underline{a}) = a_{ii}$.

No Capítulo 4, onde se inicia a descrição da formulação numérica proposta, assim como nos seguintes, a notação tensorial é abandonada e substituída por uma notação matricial. Assim, a partir desse Capítulo, as componentes independentes dos tensores são apresentadas em vectores, definindo-se através de produtos matriciais todas as operações tensoriais necessárias. A representação de vectores e matrizes faz-se de modo indistinto através de caracteres em negrito, mantendo-se a simbologia anteriormente adoptada para grandezas escalares.

A opção por esta mudança de notação a meio do texto justifica-se pela maior adequabilidade da notação matricial para a descrição da implementação numérica, já que esta é consentânea com o modo de armazenamento de dados utilizado pela generalidade das linguagens de programação.

1.5 Organização do documento

O presente documento encontra-se estruturado em 8 capítulos. Após este capítulo introdutório, onde foram apresentados a motivação, o objectivo do trabalho e a descrição da notação utilizada ao longo deste documento, seguem-se os capítulos centrais da tese cujo conteúdo é sumarizado em seguida.

Capítulo 2. Procede-se a uma definição rigorosa do problema em análise. Para tal, são revistos alguns dos conceitos estabelecidos pela Teoria da Plasticidade considerados essenciais para estabelecer o enquadramento teórico adequado do problema. Segue-se então a formulação do problema em estudo. Incluem-se ainda algumas considerações sobre consequências resultantes das hipóteses adoptadas na formulação do problema.

Capítulo 3. Apresenta-se neste capítulo uma breve revisão bibliográfica, na qual se procura enquadrar o leitor sobre o estado-da-arte das formulações baseadas nos Teoremas de Análise Limite. Aqui, são referidos os trabalhos considerados mais relevantes no contexto desta tese, destacando-se os aspectos principais de cada abordagem.

Capítulo 4. O principal objectivo deste capítulo é a exposição da formulação de elementos finitos proposta. Esta descrição tem como ponto de partida o modelo apresentado em [129]. Discute-se uma variante dual da formulação de limite superior, retomando seguidamente a apresentação do desenvolvimento da formulação na sua forma inicial. Ao longo deste capítulo, procura-se, ainda, destacar as características originais da formulação desenvolvida.

Capítulo 5. Este capítulo é dedicado à descrição da implementação numérica da formulação. Assim, delineam-se as estratégias adoptadas na minimização local do algoritmo de Uzawa para os diversos materiais considerados neste trabalho. Apresentam-se, ainda, o tipo de elementos finitos utilizados não só para problemas 2D e 3D, como também para a introdução de descontinuidades. Adicionalmente, descreve-se a possibilidade de introduzir corpos rígidos no modelo.

Capítulo 6. Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento da implementação do modelo proposto para processamento paralelo. Diversas estratégias alternati-

vas são sugeridas e discutidas. Esta abordagem permite aumentar significativamente a capacidade de cálculo e, conseqüentemente, a precisão das estimativas das cargas de cálculo.

Capítulo 7. Com o intuito de validar e aferir as capacidades da formulação proposta, apresentam-se neste capítulo exemplos numéricos da sua aplicação. Os exemplos analisados advêm de problemas oriundos da área da engenharia civil e procuram ilustrar as potencialidades implementadas no que se refere à abrangência de materiais, elementos de deformação constante e linear, utilização de corpos rígidos e a introdução de descontinuidades. Este capítulo vê-se ainda enriquecido com uma secção de exemplos que realçam as vantagens da utilização do processamento paralelo na Análise Limite.

Capítulo 8. Por fim, são apresentadas as principais conclusões retiradas deste trabalho, juntamente com algumas sugestões de desenvolvimentos futuros.

1.6 Nota final

Parte da formulação apresentada neste documento foi já publicada em artigos de revistas científicas internacionais [129],[130], tendo sido divulgadas em congressos algumas das suas aplicações[127],[128],[126]. O trabalho de investigação objecto desta tese resultou ainda no desenvolvimento de um programa de cálculo automático para Análise Limite denominado **SUBLIM3d**, acrónimo de **S**trict **U**pper **B**ound **L**IMit Análisis Code, podendo ser encontrada mais informação na página oficial do programa www.dec.fct.unl.pt/projectos/SUBLIM3d.

Capítulo 2

Definição do Problema

2.1 Considerações iniciais

A importância da determinação de cargas de colapso de uma estrutura no seu dimensionamento é incontestável. Nos últimos anos, a exactidão dessa determinação melhorou significativamente com o rápido desenvolvimento de meios computacionais, possibilitando o aperfeiçoamento e o aumento da complexidade dos modelos de análise. É neste contexto que se enquadra o problema em estudo, para a resolução do qual se irá apresentar o desenvolvimento de uma ferramenta de cálculo automático, tendo por base um modelo de elementos finitos.

A completa descrição do problema, conforme pretendido neste capítulo, implica que previamente se proceda ao enquadramento teórico do mesmo. Para este efeito considera-se conveniente rever alguns conceitos fundamentais estabelecidos na Teoria da Plasticidade ([56], [63], [79], [78]), dando especial ênfase aos Teoremas de Análise Limite.

Como ponto de partida, considera-se como válida a hipótese de linearidade geométrica, desprezando-se nas equações de equilíbrio quaisquer efeitos de 2ª ordem, e resultando igualmente válida a hipótese das pequenas deformações. Esta última, permite estabelecer a seguinte relação de compatibilidade entre o campo de desloca-

mentos, \underline{u} , e o campo das deformações, $\underline{\varepsilon}$,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1)$$

Em alternativa, pode-se estabelecer uma relação análoga mas mais conveniente no âmbito do presente trabalho, entre o campo das velocidades, $\underline{\dot{u}}$, e a taxa das deformações, $\underline{\dot{\varepsilon}}$,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (2.2)$$

Adicionalmente, o problema baseia-se ainda nos seguintes pressupostos:

- i. materiais caracterizados por um comportamento isotrópico;
- ii. todas as deformações inelásticas resultam de uma resposta perfeitamente plástica dos materiais;
- iii. aplicação do carregamento em condições quase estáticas, permitindo desprezar quaisquer efeitos inerciais.

2.2 Revisão de conceitos da Teoria da Plasticidade

Para caracterizar o comportamento plástico de um material, pressuposto na definição do problema, recorre-se numa abordagem clássica ao controlo da plasticidade através do estado das tensões, introduzindo com este objectivo a definição do denominado *critério de cedência*,

$$f(\underline{\sigma}) \leq 0 \quad (2.3)$$

Este critério estabelece uma *superfície de cedência*, $f(\underline{\sigma}) = 0$, definida através de uma função escalar do tensor das tensões $\underline{\sigma}$, que delimita os estados de tensão considerados admissíveis.

Para que ocorra um incremento das deformações plásticas no material é necessário que o estado de tensão se encontre sobre a superfície de cedência, *i.e.*, que a igualdade em (2.3) se verifique. Caso contrário, o material apresenta, localmente, uma resposta em regime elástico, permanecendo as deformações plásticas constantes. Es-

tas últimas são necessariamente nulas em pontos cuja história da evolução do estado de tensão nunca observe registos localizados sobre a superfície de cedência.

No caso mais genérico admite-se que a superfície de cedência inicial possa sofrer alterações com o aparecimento de deformações plásticas. Os modelos mais comuns utilizados para caracterizar a evolução da superfície de cedência prevêem que esta possa sofrer uma dilatação, mantendo contudo a sua forma e origem no espaço das tensões. Este comportamento conduz a um aumento na resistência do material e denomina-se por endurecimento (*hardening* na nomenclatura inglesa) isotrópico. Em oposição, o fenómeno de redução de resistência devido a uma contracção da superfície de cedência denomina-se de amolecimento (*softening* na nomenclatura inglesa). No caso do modelo prever apenas translação da posição inicial da superfície de cedência no sentido das deformações plásticas, mantendo no entanto o seu tamanho e forma inicial, está-se perante o denominado endurecimento cinemático. Este tipo de lei de endurecimento é habitualmente utilizada para modelar fenómenos como o conhecido efeito de *Bauschinger* [26],[78] observado experimentalmente em metais. Estes dois tipos de endurecimento podem ainda ocorrer simultaneamente dando origem a um endurecimento misto [78].

Deste modo, a superfície de cedência passa também a ser função não só do estado de tensões mas também do estado de endurecimento do material, \mathbb{E} ,

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \mathbb{E}) = 0 , \quad (2.4)$$

sendo a evolução do estado de endurecimento tipicamente controlada através das deformações plásticas ocorridas ou alternativamente através do trabalho plástico dissipado, independentemente da trajectória das deformações, respectivamente o *strain hardening* e o *work hardening*, empregando a terminologia inglesa.

No entanto, para o caso específico do tipo de material considerado neste trabalho, em que os materiais apresentam um comportamento perfeitamente plástico, a superfície de cedência deverá permanecer inalterada ao longo de toda a história do carregamento ($\mathbb{E} = 0$).

Na próxima secção serão apresentadas e discutidas restrições impostas à forma da função da superfície de cedência. Adianta-se apenas que, para materiais isotrópicos, esta função deverá necessariamente respeitar uma das seguintes situações [111]:

- i. ser uma função simétrica das componentes principais do tensor das tensões,
- ii. ser uma função dependente dos invariantes do tensor das tensões, e em particular ser uma função dependente do primeiro invariante de $\underline{\underline{\sigma}}$ e dos invariantes da parcela deviatórica das tensões, $\underline{\underline{s}}$, definida como,

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}} \quad (2.5)$$

onde $\underline{\underline{I}}$ representa o tensor identidade de 2ª ordem.

2.2.1 Princípio do trabalho plástico máximo

Considere-se um qualquer estado de tensão admissível, $\underline{\underline{\sigma}}$, e uma taxa de deformação plástica, $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$, gerada nesse estado de tensão. O Princípio do Trabalho Plástico Máximo (PTPM)¹ postula que para todo o estado de tensão admissível, $\underline{\underline{\sigma}}^*$, arbitrariamente escolhido, se verifica a seguinte relação:

$$\forall \underline{\underline{\sigma}}^* | f(\underline{\underline{\sigma}}^*) \leq 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}} | f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \geq 0 \quad (2.6)$$

Este princípio é também muitas vezes observado como consequência do Postulado de Estabilidade de Drucker [63],[79].

Da aplicação do PTPM resultam três consequências relevantes:

- a) a taxa de deformação plástica tem de ser orientada segundo uma normal exterior à superfície de cedência;
- b) a superfície de cedência define obrigatoriamente um espaço das tensões admissíveis convexo;
- c) a dissipação plástica por unidade de volume, \mathcal{D} , definida pelo produto interno das tensões pela taxa de deformação plástica,

$$\mathcal{D}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \quad (2.7)$$

¹O PTPM foi estabelecido através de trabalhos independentes por von Mises, Taylor e Hill em 1928, 1947 e 1948, respectivamente [79].

pode passar a ser expressa como uma função unívoca da taxa de deformação plástica, $\mathcal{D}(\underline{\dot{\epsilon}}^p)$, desde que seja conhecida a função de cedência, $f(\underline{\sigma})$.

As duas primeiras consequências são facilmente constatadas, mediante a interpretação da condição de desigualdade presente em (2.6) como uma restrição imposta ao produto interno entre dois vectores, conforme ilustrado na Figura 2.1.

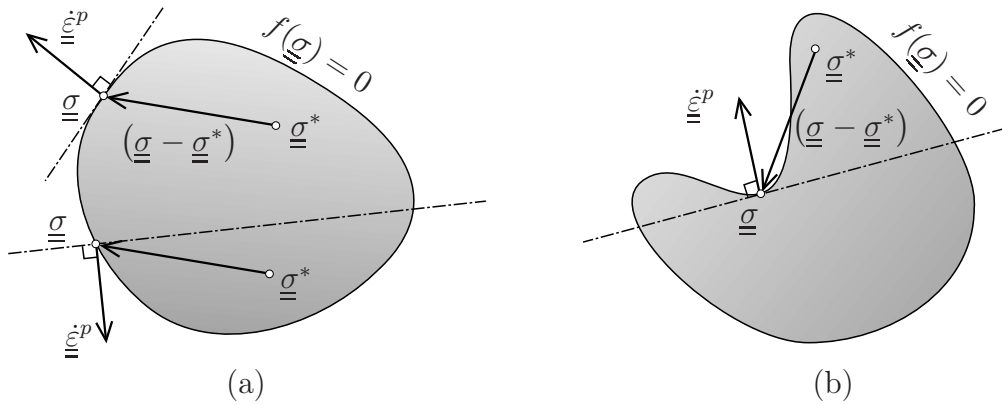


Figura 2.1: Consequências do PTPM: (a) normalidade; (b) convexidade

Como se pode constatar através da análise da Figura 2.1(a), caso o plano perpendicular à taxa de deformação plástica intercepte o domínio elástico delimitado pela superfície de cedência, é possível definir uma sub-região na qual os estados de tensão, $\underline{\sigma}^*$, nela contida, violariam necessariamente a condição (2.6) do PTPM. Conclui-se, deste modo, da necessidade da orientação da taxa de deformação plástica ser normal à superfície de cedência. Através de um raciocínio análogo pode-se concluir da obrigatoriedade da convexidade do domínio elástico. Para tal, basta constatar que o plano perpendicular a uma taxa de deformação plástica associada a um estado de tensão, localizado numa zona côncava da superfície de cedência, intercepta necessariamente a região delimitada por esta, Figura 2.1(b).

A última consequência deriva da própria definição da dissipação plástica (2.7) e da normalidade da taxa de deformação face à superfície de cedência. É de salientar no entanto que, mesmo para uma superfície de cedência não estritamente convexa caracterizada por múltiplas hipóteses de estados de tensão associados a determinada taxa de deformação plástica, a dissipação conserva-se ainda como função unívoca da taxa de deformação. Este facto é ilustrado na Figura 2.2, recorrendo ao critério de Mohr-Coulomb para um estado plano de deformação.

De um ponto de vista geométrico, a condição (2.9) e o intervalo a que α pertence, impõem, respectivamente, que a direcção da taxa das deformações plásticas seja normal à superfície do potencial $\Phi(\underline{\underline{\sigma}})$ e que o sentido da mesma se dirija para o exterior da superfície. A validade do PTPM, por sua vez, impõe que a função do potencial coincida necessariamente com a função de cedência (a menos de uma constante),

$$\Phi(\underline{\underline{\sigma}}) = f(\underline{\underline{\sigma}}) + c^{te} \quad (2.10)$$

Consequentemente está-se perante uma lei de escoamento associado [63],[79],[111], conforme ilustrado na Figura 2.3, por oposição a uma lei não-associada onde o potencial plástico difere da função de cedência.

Caso existam pontos singulares (não diferenciáveis) na superfície do potencial, considera-se que nesses pontos a taxa de deformação possa assumir qualquer direcção contida no cone formado pelas normais exteriores na vizinhança do ponto (ver ponto B, Figura 2.3). A convexidade da superfície de cedência imposta pelo PTPM é requisito suficiente para garantir a existência deste cone. Esta condição não é mais do que uma generalização da condição de normalidade (2.9), expressa matematicamente recorrendo ao conceito de subgradiente,

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \in \alpha \partial \Phi(\underline{\underline{\sigma}}), \quad \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \quad (2.11)$$

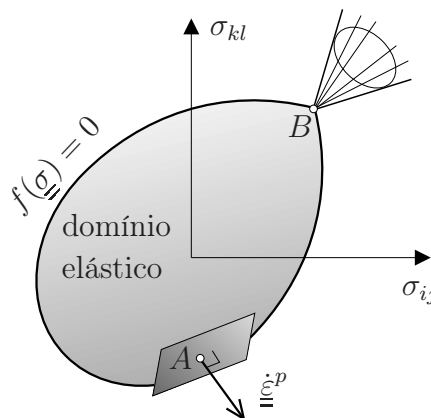


Figura 2.3: Representação da lei de escoamento associado

2.2.2.1 Descontinuidades no campo de velocidades

Para concluir a descrição do escoamento, falta por último salientarmos que para materiais perfeitamente plásticos é possível a ocorrência de descontinuidades no campo de velocidades. Do ponto de vista físico, as referidas descontinuidades podem ser observadas como uma variação no campo da taxa das deformações plásticas localizadas numa zona de espessura infinitesimal de material [28]. Deste modo estas descontinuidades encontram-se igualmente sujeitas à lei de escoamento (2.9),(2.11). Em Salençon[111], pode ser encontrado um tratamento matemático rigoroso das descontinuidades do campo das velocidades.

2.2.3 Funções de dissipação

Nesta subsecção são enumeradas todas as funções de dissipação associadas aos critérios de cedência utilizados neste trabalho. As expressões aqui adoptadas seguem a definição apresentada por Salençon [110],[111]. As referidas expressões são definidas no espaço das tensões principais $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ e das taxas de deformação principais $(\dot{\epsilon}_I, \dot{\epsilon}_{II}, \dot{\epsilon}_{III})$, pressupondo a seguinte ordenação:

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$$

É ainda introduzida a definição do espaço auxiliar, \mathcal{C}_c . Este espaço é definido por forma a garantir implicitamente a imposição das condições de normalidade do escoamento plástico (2.9) e (2.11), bastando para tal restringir as taxas de deformação plástica admissíveis ao seu domínio.

Na Figura 2.4 representam-se, no espaço das tensões principais, as superfícies de cedência correspondentes a cada critério considerado.

2.2.3.1 Critério de Tresca

Para o critério de Tresca a expressão da função de cedência é dada por,

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_I - \sigma_{III} - 2c \quad (2.12)$$

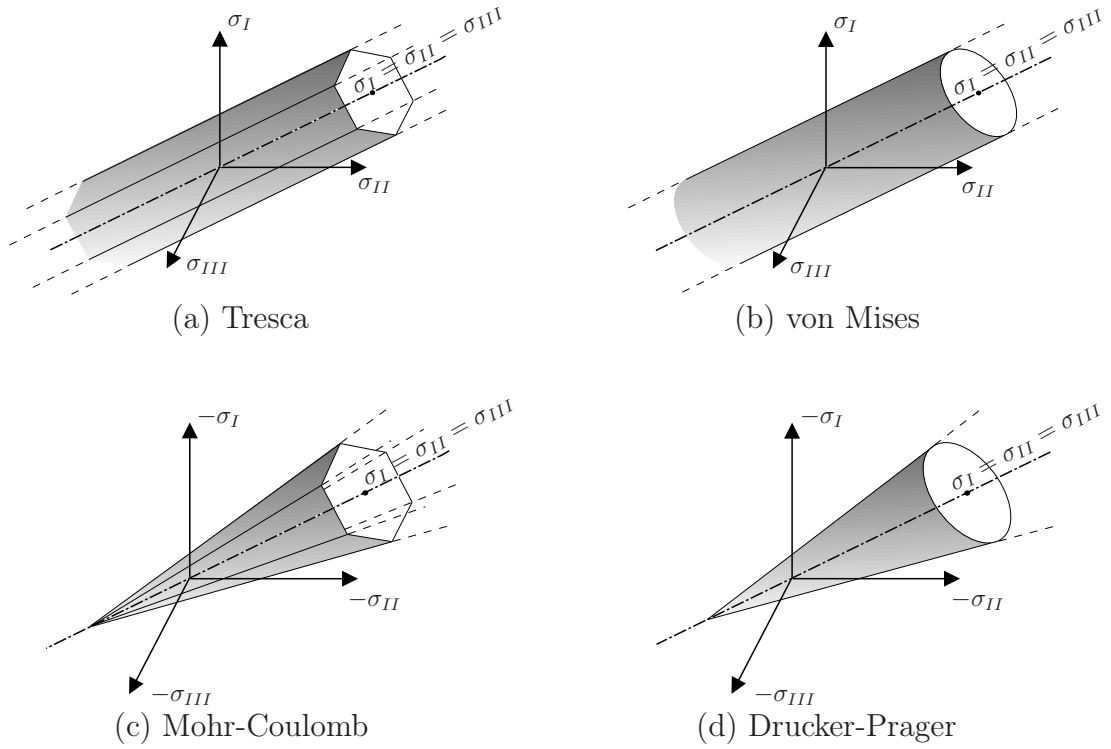


Figura 2.4: Representação gráfica das superfícies de cedência

onde c representa a coesão do material. Por sua vez a função de dissipação e o espaço \mathcal{C}_c são definidos através das expressões,

$$\mathcal{D}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) = c (|\dot{\epsilon}_I^p| + |\dot{\epsilon}_{II}^p| + |\dot{\epsilon}_{III}^p|), \quad \forall \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \in \mathcal{C}_c \quad (2.13)$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \in \mathcal{C}_c \Leftrightarrow \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) = 0 \quad (2.14)$$

É por vezes habitual limitar a máxima tensão de tracção, σ_T , admissível por este critério. Neste caso, obtém-se o denominado *critério de Tresca truncado em tracção*,

$$\begin{cases} f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I - \sigma_{III} - 2c, & \sigma_I > \sigma_T \\ f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0, & \sigma_I = \sigma_T \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\mathcal{D}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) = c (|\dot{\epsilon}_I^p| + |\dot{\epsilon}_{II}^p| + |\dot{\epsilon}_{III}^p| - \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p)) + \sigma_T \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p), \quad \forall \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \in \mathcal{C}_c \quad (2.16)$$

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p \in \mathcal{C}_c \Leftrightarrow \text{tr}(\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p) \geq 0 \quad (2.17)$$

2.2.3.2 Critério de von Mises

Para o critério de von Mises são válidas as seguintes expressões,

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2)} - k \quad (2.18)$$

onde k é tensão de corte de cedência obtida num ensaio de tracção uniaxial.

$$\mathcal{D}(\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p) = k \sqrt{2 \text{tr}((\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p)^2)}, \quad \forall \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p \in \mathcal{C}_c \quad (2.19)$$

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p \in \mathcal{C}_c \Leftrightarrow \text{tr}(\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p) = 0 \quad (2.20)$$

2.2.3.3 Critério de Mohr-Coulomb

As funções de cedência, de dissipação e a definição do espaço \mathcal{C}_c são expressos para o critério de Mohr-Coulomb, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I(1 + \sin\phi) - \sigma_{III}(1 - \sin\phi) - 2c \cos\phi \quad (2.21)$$

onde ϕ é o ângulo de atrito interno do material.

$$\mathcal{D}(\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p) = \frac{c}{\tan\phi} \text{tr}(\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p), \quad \forall \underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p \in \mathcal{C}_c \quad (2.22)$$

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p \in \mathcal{C}_c \Rightarrow \text{tr}(\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p) \geq (|\dot{\epsilon}_I^p| + |\dot{\epsilon}_{II}^p| + |\dot{\epsilon}_{III}^p|) \sin\phi \quad (2.23)$$

2.2.3.4 Critério de Drucker-Prager

Para finalizar, apresentam-se as expressões correspondentes ao critério de Drucker-Prager:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2)} - \frac{3\sin\phi}{\sqrt{3(3 + \sin^2\phi)}} \left(\frac{c}{\tan\phi} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \right) \quad (2.24)$$

$$\mathcal{D}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) = \frac{c}{\tan\phi} \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p), \quad \forall \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \in \mathcal{C}_c \quad (2.25)$$

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p \in \mathcal{C}_c \Leftrightarrow \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) \geq \sqrt{\frac{2\sin^2\phi}{3 + \sin^2\phi}} \left(3\text{tr}((\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p)^2) - \text{tr}^2(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p) \right) \quad (2.26)$$

2.2.3.5 Dissipação em superfícies de escorregamento

Conforme referido anteriormente (secção 2.2.2), a Teoria da Plasticidade não exclui a possibilidade da ocorrência de descontinuidades no campo das velocidades, surgindo, assim, a necessidade de quantificar a dissipação plástica que ocorre nesta situação. Considere-se uma superfície escorregamento (representada na Figura 2.5), S , onde ocorre uma descontinuidade no campo de velocidades entre dois sub-domínios Ω_1 e Ω_2 . A velocidade relativa, $\hat{\underline{\underline{v}}}$, num ponto genérico da superfície de escorregamento é obtida através da diferença entre as velocidades dos dois sub-domínios adjacentes,

$$\hat{\underline{\underline{v}}} = \underline{\underline{u}}_2 - \underline{\underline{u}}_1, \quad (2.27)$$

sendo, respectivamente, $\hat{\underline{\underline{v}}}_n = (\hat{\underline{\underline{v}}} \cdot \underline{\underline{n}})\underline{\underline{n}}$ e $\hat{\underline{\underline{v}}}_t = \hat{\underline{\underline{v}}} - \hat{\underline{\underline{v}}}_n$, as componentes normal e tangencial da velocidade relativa.

No caso dos materiais friccionais (critérios de Mohr-coulomb e Drucker-Prager) a regra da normalidade impõe que o ângulo entre o vector da velocidade relativa e a superfície de escoamento seja superior ao ângulo de atrito, ϕ . Esta condição é expressa por:

$$\hat{\underline{\underline{v}}} \in \mathcal{C}_d \Rightarrow \hat{\underline{\underline{v}}} \cdot \underline{\underline{n}} \geq |\hat{\underline{\underline{v}}}| \sin\phi, \quad (2.28)$$

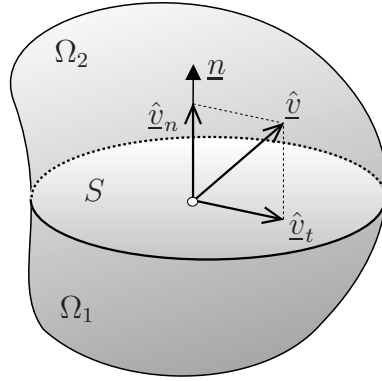


Figura 2.5: Superfície de escorregamento: velocidade relativa

sendo a dissipação traduzida pela seguinte expressão:

$$\mathcal{D}(\hat{v}) = \frac{c}{\tan\phi} |\hat{v}_n| \quad (2.29)$$

Na definição (2.28) o espaço \mathcal{C}_d desempenha, para o campo das velocidades relativas, uma função correspondente à que é desempenhada pelo o espaço, \mathcal{C}_c , para o campo da taxa das deformações.

O caso dos materiais puramente coesivos (Tresca e von Mises) pode ser interpretado como uma particularização dos materiais friccionais em que $\phi \rightarrow 0$. Assim, a condição de normalidade (2.28) resulta em,

$$\hat{v} \in \mathcal{C}_d \Rightarrow \hat{v} \cdot \underline{n} = 0 \quad (2.30)$$

Ressalta-se que a desigualdade patente na condição (2.28) tem origem no facto de existir um ápice na superfície de cedência dos materiais friccionais (ver Figura 2.4). A inexistência do referido ápice para os materiais puramente coesivos transforma a referida desigualdade numa igualdade (2.30).

Por sua vez, a expressão da dissipação (2.29) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\mathcal{D}(\hat{v}) = k_I |\hat{v}_t| \quad (2.31)$$

onde k_I é a tensão de corte limite na interface, que corresponde ao valor dos parâmetros c e k para os materiais tipo Tresca e tipo von Mises, respectivamente.

Finalmente, considera-se ainda o caso do critério de Tresca truncado em tracção. Neste caso, a igualdade (2.30) que impõe a condição de normalidade transforma-se novamente numa desigualdade, por forma a acomodar a situação de truncatura,

$$\hat{\underline{v}} \in \mathcal{C}_d \Rightarrow \hat{\underline{v}} \cdot \underline{n} \geq 0, \quad (2.32)$$

sendo a dissipação plástica determinada através da expressão (2.33) (ver Figura 2.6):

$$\mathcal{D}(\hat{\underline{v}}) = k_I |\hat{\underline{v}}| + (\sigma_T - k_I) |\hat{\underline{v}}_n| \quad (2.33)$$

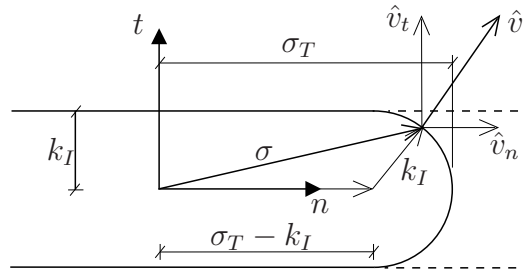


Figura 2.6: Descontinuidade com o critério de Tresca truncado em tracção

2.3 Análise Limite

A Análise Limite debruça-se sobre a determinação de cargas de colapso de sistemas mecânicos. Deste modo, é conveniente clarificar o que se considera como colapso de um sistema mecânico que exiba um comportamento perfeitamente plástico.

Introduza-se o conceito de carregamento *admissível*, este é um carregamento para o qual é possível obter uma distribuição de tensões equilibradas, que respeite em todo o domínio a condição de cedência (2.3). Entende-se por distribuição de tensões equilibradas, um campo de tensões que respeita não só as condições de equilíbrio no domínio, Ω ,

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0, \quad (2.34)$$

mas também nas fronteiras estáticas, Γ_σ , onde são prescritas forças de fronteira, \underline{t} ,

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{t} \quad \text{em } \Gamma_\sigma, \quad (2.35)$$

onde o vector, n , representa o versor da normal exterior à fronteira. Em (2.34), b_j , representa a componente, na direcção j , do vector das forças de massa, \underline{b} .

Assim, considera-se que um sistema mecânico atingiu um carregamento limite, estando iminente o seu colapso, sempre que para um carregamento admissível possam ocorrer deformações plásticas incontrolláveis na estrutura [79].

Para um conjunto genérico de carregamentos Q_1, Q_2, \dots, Q_n , é possível definir-se uma região de carregamentos admissíveis, conforme representado na Figura 2.7. São naturalmente considerados carregamentos inadmissíveis qualquer combinação de carregamento fora da região representada, sendo esta delimitada pelos denominados carregamentos limite. Esta região herda as propriedades de convexidade da superfície de cedência [111].

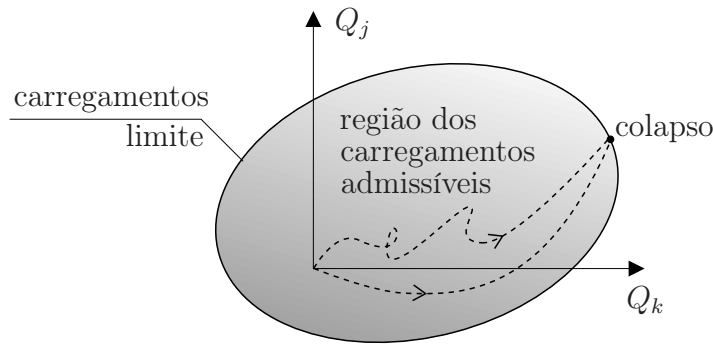


Figura 2.7: Domínio dos carregamentos admissíveis

De notar que a carga de colapso não é influenciada pela trajetória de carregamento [111], como se pretende ilustrar através das duas trajetórias representadas a traçado na Figura 2.7. No entanto, esta afirmação deixa de ser válida para o caso de carregamento cíclicos. Nestas circunstâncias o colapso da estrutura pode ocorrer sem nunca ser atingido um carregamento limite [63], através de fenómenos de *plasticidade alternada* (também denominada de *fadiga de baixo ciclo*) ou de *colapso incremental*. Estas situações não serão aqui abordadas por se considerar estarem fora do âmbito deste trabalho.

No caso de sistemas com comportamento rígido-plástico as deformações plásticas, a poderem ocorrer, processam-se inevitavelmente de forma incontrollável, o que significa que o seu aparecimento implica necessariamente o facto de se ter atingido o colapso da estrutura. Mais, a plastificação local de regiões, previamente à situação de colapso, não faz com que possam ocorrer nestas regiões deformações. O

mesmo não é observado para sistemas com um comportamento elásto-plástico, já que as eventuais deformações elásticas podem permitir o acumular de deformações plásticas antes de se atingir a situação de colapso.

Não obstante esta diferença significativa entre estes dois tipos de comportamento, demonstra-se [35],[79]², que a região de carregamentos admissíveis é coincidente, no caso dos dois sistemas mecânicos apresentarem critérios de cedência idênticos. Isto significa que as deformações elásticas não influenciam a carga de colapso. Levando em consideração este facto, a partir deste momento e sem perda de qualquer generalidade para o comportamento elásto-plástico, será apenas tratado o caso do comportamento rígido-plástico.

É neste contexto que surgem os teoremas da Análise Limite. Estes três teoremas permitem retirar conclusões sobre a capacidade de dado carregamento ser passível de ser suportado e conseqüentemente sobre a carga de colapso de uma estrutura. Deste modo, eles constituem uma poderosa ferramenta teórica no domínio da Análise Limite, que permite, de uma forma expedita, a obtenção de majorantes/minorantes para as cargas de colapso.

Admita-se então um sistema mecânico que exiba um comportamento perfeitamente plástico e aceite-se como válido o PTPM. Estas permissas garantem a validade dos teoremas a seguir enunciados:

Teorema Estático. *Se para um determinado carregamento for possível obter pelo menos uma distribuição de tensões que seja admissível, i.e, onde as condições de cedência (2.3) e de equilíbrio (2.34) se verifiquem localmente em todo o domínio e satisfaça igualmente a condição equilíbrio (2.35) na fronteira estática, então esse carregamento pertence à região dos carregamentos admissíveis (ou suportáveis).*

Teorema Cinemático. *Se, para um determinado carregamento, for possível definir um campo de velocidades virtual, \dot{u}^* , que seja compatível e onde a potência das forças exteriores aplicadas,*

$$W_e = \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{\dot{u}}^* d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \underline{t} \cdot \underline{\dot{u}}^* d\Gamma \quad (2.36)$$

²Ambos os autores destas referências apelam nas suas demonstrações ao postulado de estabilidade de Drucker. É no entanto possível retirar conclusões análogas recorrendo ao PTPM, já enunciado neste trabalho

seja superior ou igual à potência plástica total dissipada,

$$W_{\mathcal{D}} = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\underline{\dot{\underline{\epsilon}}}) \, d\Omega \quad (2.37)$$

então esse carregamento é não interior à região dos carregamentos admissíveis (não estando eliminada a hipótese de se tratar de um carregamento limite).

Neste instante, torna-se necessário precisar o conceito de campo de velocidades compatível que surge na enunciação do Teorema Cinemático. Entende-se por campo de velocidades compatível todo aquele campo que respeita as condições de compatibilidade na fronteiras cinemática, Γ_u , expressa pela condição,

$$\underline{\dot{u}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.38)$$

e cujo campo da taxa de deformações, $\dot{\underline{\epsilon}}$, a ele associado através da condição de compatibilidade (2.2), respeite a regra de escoamento associado estabelecida por (2.9-2.11).

Teorema da Unicidade. *Se, para um determinado carregamento, for possível verificar simultaneamente os Teoremas Estático e Cinemático, então esse carregamento é necessariamente um carregamento limite.*

Tendo por base os Teoremas Estático e Cinemático é possível definir para uma determinada trajectória de carregamento linear um minorante e um majorante da carga de colapso. No limite, o Teorema da Unicidade garante que o majorante e o minorante coincidem.

Conforme foi mencionado, a validade dos Teoremas da Análise Limite, aqui apresentados na sua forma clássica, requerem o estrito cumprimento do PTPM. O que restringe a sua aplicação (de uma forma estrita) a materiais regidos por um escoamento associado. Para o caso de materiais que apresentem um comportamento perfeitamente plástico mas que no entanto tenham um escoamento não associado, situação comum no domínio da Mecânica dos Solos, surgem os Teoremas de Radenkovic [79],[110]. Inicialmente atribuídos a Radenkovic, estes teoremas sofreram posteriores modificações por diversos autores. Optou-se neste trabalho por seguir as enunciações dos teoremas encontrada em [79].

Primeiro Teorema de Radenkovic. *A região dos carregamentos admissíveis de*

um sistema mecânico constituído por um material regido por um escoamento não associado está contida na região dos carregamentos admissíveis de um sistema de um material com um critério de cedência análogo que obedece à regra de escoamento associado.

Segundo Teorema de Radenkovic. *Considere-se a existência da superfície convexa, $g(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$, contida necessariamente pela superfície de cedência, $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$, definida de modo a que:*

$$i. \forall \underline{\underline{\sigma}} | f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \exists \underline{\underline{\sigma}}' | g(\underline{\underline{\sigma}}') = 0 \wedge (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}') \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \geq 0$$

ii. a regra da normalidade se observe, i.e, que as Eq. (2.9) e (2.11) se verifiquem para $\Phi(\underline{\underline{\sigma}}) = g(\underline{\underline{\sigma}})$.

Onde $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p$ é a taxa de deformação plástica associada ao estado de tensão $\underline{\underline{\sigma}}$.

Então, todos os carregamentos admissíveis para um dado sistema mecânico de um material regido por um escoamento não associado, também o são no caso do material apresentar um escoamento associado ao critério de cedência da superfície de cedência, $g(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$, correspondente.

Na Figura 2.8 ilustra-se a construção gráfica da superfície, $g(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$, definida no segundo Teorema de Radenkovic, para um caso bidimensional.

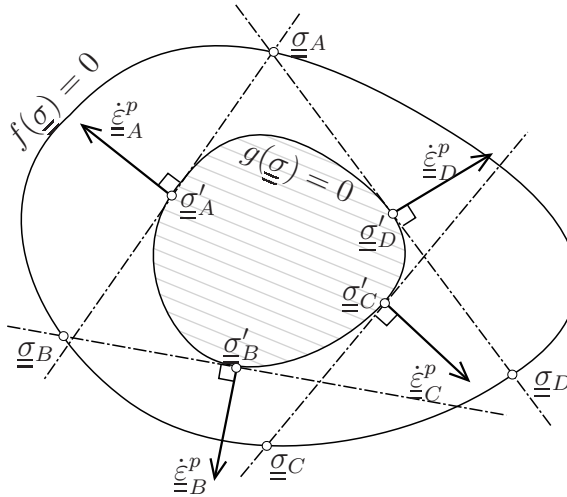


Figura 2.8: Construção da superfície, $g(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$.

Poder-se-á afirmar que estes últimos teoremas alargam a possibilidade de utilização dos Teoremas Estático e Cinemático a materiais com escoamentos não associados.

Contundo, é previsível que os resultados práticos desta utilização sejam menos satisfatórios. A não aplicabilidade do Teorema da Unicidade, resulta em que as regiões interiores e exteriores de carregamentos admissíveis, definidas respectivamente através destes Teoremas Estático e Cinemático, deixem de ser complementares. Deste modo, deixa de ser possível garantir a qualidade de majorantes/minorantes de cargas de colapso obtidos com base nestes teoremas no caso de materiais com escoamento não associado.

2.4 Definição do problema

Com base no enquadramento teórico estabelecido no início deste capítulo, é agora possível enunciar de forma sucinta mas rigorosa a definição do problema a tratar no presente trabalho.

Assim, pretende-se determinar estimativas de elevado grau de precisão de cargas de colapso de um conjunto de problemas não só de estados planos de deformação/tensão, mas também tridimensionais (com especial enfoque nestes últimos), recorrendo a uma utilização *estrita* do Teorema Cinemático da Análise Limite.

O termo *estrito* é utilizado neste contexto para garantir que todas as hipóteses e condições enunciadas no teorema mencionado são rigorosamente respeitadas.

2.5 Considerações finais

Para concluir este capítulo, tecem-se algumas considerações no que respeita à aplicabilidade do problema aqui definido na resolução de problemas no domínio da Engenharia Civil. São inúmeras as referências na literatura onde são apresentadas propostas de metodologias e formulações baseadas nos conceitos da Análise Limite em problemas tão diversos como: o cálculo da capacidade resistente de peças de betão armado [27],[97],[99] e estruturas metálicas [2],[60],[90],[119]; a análise de estruturas em alvenaria [55]; a análise de estabilidade de taludes [29],[103] e impulsos de terrenos [120],[131], a capacidade resistente de fundações [58],[91],[112] e a estabilidade de túneis [11],[12], apenas para mencionar algumas das vastas aplicações no campo da mecânica dos solos.

Como é sobejamente conhecido o betão apresenta um comportamento frágil não sendo, geralmente e por este facto, adequado recorrer-se à Análise Limite no estudo para o estruturas compostas por este material. Ainda assim, verifica-se que, em determinadas situações, as estruturas de betão armado podem apresentar uma ductilidade significativa, que lhes é conferida pelas armaduras de aço. Nestes casos, torna-se então admissível recorrer aos princípios da Análise Limite, conforme é referido em [99]. Este trabalho, juntamente com [97], constituem tratados de relevo onde é realizada uma compreensiva apresentação de métodos de dimensionamento de betão armado baseados na Análise Limite. Refere-se, no entanto, que se considera que a formulação desenvolvida não se adequa, nos moldes em que se realizou a sua implementação numérica, ao estudo deste tipo de problemas.

De todos os materiais estruturais comumente utilizados na Engenharia Civil, o aço é, porventura, aquele que apresenta o comportamento plástico que mais se adequa à Análise Limite. Contudo, a esbelteza das estruturas metálicas torna frequentemente preponderante o aparecimento de efeitos de 2ª ordem, conduzindo a limitações da capacidade resistente devido a efeitos de instabilidade. A incompatibilidade destes efeitos com a linearidade física pressuposta na Análise Limite, inviabiliza a sua utilização generalizada no dimensionamento das estruturas metálicas. Existem, porém, situações em que a utilização da Análise Limite pode proporcionar uma ferramenta de cálculo valiosa, nomeadamente no estudo de pormenores de ligações tanto soldadas [60],[119] como aparafusadas [2].

Na última década tem-se observado um crescente interesse da aplicação da Análise Limite no estudo das estruturas em alvenaria (não reforçada), conforme se pode comprovar através do grande número de trabalhos recentemente publicados nesta área, nomeadamente e a título de exemplo: [22],[23],[24],[46],[93],[94],[101],[121]. No entanto, a alvenaria estrutural apresenta algumas especificidades que é necessário ter em consideração aquando da sua modelação, nomeadamente a nível da aplicação dos princípios da Análise Limite. Com efeito, trata-se de um material compósito constituído pelas unidades (blocos cerâmicos, betão ou pedra) e a argamassa, originando um comportamento anisotrópico muito condicionado pelas juntas de argamassa que constituem potenciais superfícies de rotura. Embora presente, em muitas situações, um comportamento frágil (inadequado para Análise Limite), noutras situações, dependendo do carregamento, o comportamento poderá apresentar uma ductilidade considerável. É para este último caso que a Análise Limite se tem revelado uma fer-

ramenta de cálculo capaz de produzir resultados de qualidade quando comparados com os dados experimentais existentes. Em regra geral, adoptam-se duas abordagens distintas para modelar as estruturas de alvenaria:

- a *micro-modelação*, na qual as unidades são modelados por elementos contínuos sendo as juntas de argamassa representadas por elementos de descontinuidades. Considera-se que este é tipo de estratégia mais apropriada ao presente trabalho. É de referir que os dados experimentais revelam que, na rotura, o escorregamento verificado nas juntas de argamassa se processa com uma dilatação praticamente nula. Este comportamento não é consentâneo com a lei de escoamento associada. Contudo, este facto não torna impeditiva a utilização da Análise Limite, havendo propostas que procuram contornar esta limitação [101].
- a *macro-modelação*, que não individualiza as unidades e a argamassa, tratando a alvenaria como um único meio homogéneo não isotrópico [95]. Esta estratégia é indicada, essencialmente, para a análise de estruturas de grande dimensão. No entanto, este tipo de modelação não se enquadra nos pressupostos assumidos neste trabalho, devido à falta de isotropia.

É na análise de problemas geotécnicos que o uso de métodos numéricos fundamentados nos Teoremas de Análise Limite se encontra, porventura, mais enraizado e disseminado. A comprová-lo, está a diversidade de problemas analisados neste domínio constatada nos trabalhos já mencionados, no início desta secção. Esta prática, mantém, porém, uma questão em aberto: a observação experimental revela que solos em condições drenadas exibem uma dilatação não concordante com uma lei de escoamento associada. Assim, e segundo os Teoremas de Radenkovic, apenas se pode afirmar que o material não associado não pode ser mais resistente que o homólogo associado. Contudo, existem estudos (para determinados tipos de problemas) que indicam que a diferença das cargas limite obtidas com base nestes dois tipos de materiais não pode apresentar grande discrepância [37].

Capítulo 3

Revisão bibliográfica

No presente capítulo apresenta-se uma revisão bibliográfica das principais formulações de elementos finitos para Análise Limite. Esta apresentação não pretende efectuar um relato exaustivo de todas as formulações existentes, mas antes fornecer uma ideia dos trabalhos considerados mais marcantes neste domínio, bem como das tendências actuais de evolução das formulações.

Desde os trabalhos pioneiros de Lysmer [85], na década de 70, que se desenvolvem modelos de elementos finitos para determinação de cargas de colapso, auxiliados por técnicas oriundas da programação matemática. Estes modelos resultam da discretização de um problema de optimização, formulado com base nos teoremas de Análise Limite.

Lysmer [85] desenvolve, para problemas de deformação plana e utilizando o critério de Mohr-Coulomb, uma formulação baseada no Teorema Estático da Análise Limite. Recorrendo a um elemento triangular de tensão (com um campo de aproximações linear) e a uma linearização da superfície de cedência, descrita por uma circunferência no espaço das tensões (X, Y) , com $X = \sigma_x - \sigma_y$ e $Y = 2\tau_{xy}$, através de um polígono de 12 lados, a abordagem utilizada resulta num problema de optimização linear, resolvido através do algoritmo do Simplex [100].

A utilização de métodos lineares de programação matemática com base na linearização dos critérios de rotura adoptados, iniciada por Lysmer, estabelece-se como estratégia dominante no desenvolvimento de formulações para Análise Limite, até meados da década de 90, sendo utilizada por diversos autores nos seus trabalhos

[6],[17],[30],[114],[116],[7].

Observa-se então um abandono progressivo do uso dos métodos de programação matemática linear a favor de formulações desenvolvidas com base em algoritmos de programação matemática não linear e é, sem dúvida, sobre estes últimos que se baseiam as formulações de elementos finitos para Análise Limite que constituem o estado-da-arte actual. Estas serão descritas em seguida.

Contudo, antes de se prosseguir com a apresentação destas formulações, convém definir a classificação adoptada para as agrupar. Assim, as formulações são divididas em dois grandes grupos: as formulações de limite inferior (*lower bound*) e as formulações de limite superior (*upper bound*). Esta classificação é atribuída consoante o modelo numérico seja desenvolvido com base no Teorema Estático ou no Teorema Cinemático da Análise Limite.

Refira-se que, qualquer que seja o Teorema utilizado para deduzir a formulação, o problema matemático de optimização resultante, uma vez expresso na sua forma discreta, pode ser reescrito através de quatro formas duais, perfeitamente equivalentes, conducentes ao mesmo resultado: (i) um problema de minimização, (ii) um problema de maximização, (iii) um problema misto de minimização/maximização e (iv) um sistema de equações e inequações que exprimem as condições de optimalidade [100]. É interessante constatar que a dualidade matemática entre os problemas (i) e (ii), resulta, de um ponto de vista mecânico, na dualidade entre os Teoremas Estático e Cinemático. A exploração desta dualidade para obtenção de uma formulação de elementos finitos para Análise Limite é utilizada pela primeira vez por Anderheggen e Knöpfel [6]. Salienta-se ainda o trabalho de Zouain *et al.* [139] na obtenção de um algoritmo de programação matemática não linear baseado nas condições de optimalidade (iv). Christiansen [31] debruça-se igualmente sobre esta temática da dualidade nas formulações de Análise Limite, dando particular relevo ao formalismo matemático envolvido.

As formulações são ainda classificadas como fortes ou fracas. A atribuição da denominação de formulação forte, por oposição à de formulação fraca, faz-se quando o modelo respeita o cumprimento estrito das condições impostas pelos Teoremas Estático ou Cinemático, conduzindo deste modo à obtenção de um minorante ou majorante verdadeiro para a carga de colapso. Alternativamente, as formulações fracas, embora não oferecendo quaisquer garantias de majoração ou minoração da

carga de colapso com a estimativa obtida, procuram normalmente com a relaxação das condições impostas no modelo conseguir atingir melhores soluções com menores custos computacionais.

3.1 Formulações de limite superior

Existem na literatura inúmeras propostas alternativas de formulações fortes de limite superior. Estas apresentam, no entanto, uma característica comum: a utilização de elementos finitos com funções de aproximação polinomiais de grau reduzido, produzindo campos de taxas de deformação constantes ou de variação linear no domínio dos elementos. O motivo para tal reside na dificuldade em impor, de uma forma exacta, a lei de escoamento plástico associada para os critérios de cedência habitualmente adoptados [133].

Neste grupo de formulações, a primeira referência vai para o método cinemático com regularização proposto por Gennouni e Le Tallec [50] e desenvolvido posteriormente por Jiang [61] e Antão [9], que constitui a génese do modelo desenvolvido neste trabalho. Esta formulação elimina as descontinuidades do modelo através da substituição de uma lei rígido-plástica por uma lei de regularização tipo Norton-Hoff, no cálculo da dissipação plástica. São utilizadas duas aproximações distintas: a primeira interpola linearmente o campo das velocidades e a segunda aproxima o campo da taxa das deformações, considerado constante no domínio dos elementos. Através do método do Lagrangeano aumentado é imposta a compatibilidade entre as aproximações dos diferentes campos. Recorrendo a uma variante do algoritmo de Uzawa com relaxações, a solução do problema não linear de optimização resultante da formulação é obtida. O referido algoritmo permite que, em [9], a não linearidade seja tratada localmente através de uma minimização quadrática, sucedida por uma projecção da solução sobre a superfície que delimita o espaço da taxa das deformações normais.

No trabalho de Lyamin e Sloan [82], os autores apresentam uma variante da formulação proposta por Sloan [116], a qual utilizava programação linear. O novo modelo, ao invés de uma linearização da superfície de cedência, apenas executa uma *suavização* da superfície junto de zonas com singularidades, seguindo a estratégia delineada por Abbo e Sloan[1]. Surge, conseqüentemente, um problema de minimização não-linear que os autores resolvem com base num algoritmo quase-Newton com deflexão

de duas etapas, aplicando as condições de optimalidade de Kuhn-Tucker. Esta estratégia é inspirada na formulação proposta por Zouain *et al.* [139]. O algoritmo obtido revela um bom desempenho, com uma taxa de convergência que não é afetada pelo número de elementos da malha de elementos finitos e significativamente mais rápida do que o anterior algoritmo de programação linear. Contudo, para alguns problemas considerados mais difíceis do ponto de vista numérico (tais como, materiais de coesão nula ou com um elevado ângulo de atrito), pode-se observar um mau condicionamento do sistema governativo perto da solução ótima, chegando mesmo por vezes a impedir a convergência. Em trabalhos recentes de Sloan e seus co-autores, estas dificuldades são mitigadas com base em formulações que exprimem os critérios de cedência através de restrições cónicas de segunda ordem [70] e semi-definidas positivas [71]. Com estes novos métodos deixa de ser necessário efectuar as anteriores regularizações das superfícies de cedência, sendo o problema de minimização resultante agora resolúvel através de um algoritmo primal-dual de ponto interior.

A utilização de programação cónica de segunda ordem no desenvolvimento de formulações fortes de limite superior é igualmente relatada nos trabalhos de Makrodimitropoulos e Martin [87], [89], para problemas de deformação plana, utilizando elementos subparamétricos triangulares de 3 nós de deformação linear.

No que respeita a formulações fracas, começa-se por destacar a formulação proposta por Capsoni e Corradi [20]. Com base no conceito das deformações naturais assumidas (*enhanced assumed strain*, na denominação inglesa original), é desenvolvido um elemento finito misto quadrilátero de 4 nós para problemas de deformação plana com materiais puramente coesivos (utilizando o critério de von Mises ou Tresca). O elemento incorpora uma relação de compatibilidade entre o campo de velocidades e a taxa das deformações que assegura um comportamento sem *locking* e garante, *a priori*, uma deformação isocórica, requerida pela lei de escoamento plástico. Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, os autores introduzem a condição de normalização do trabalho das forças exteriores na função objectivo, resultando um problema de optimização sem restrições resolvido através do método de Newton-Raphson com relaxações. Elementos que não dissipem energia no mecanismo, comportando-se como corpos rígidos, introduzem singularidades no gradiente da função objectivo. De modo a evitar este problema numérico, crítico para a utilização do método de Newton-Raphson, é introduzido no modelo uma tolerância, sendo que

a contribuição de elementos que tenham dissipações abaixo desta tolerância, é desprezada considerando-os automaticamente como rígidos. Nos trabalhos de Capsoni e Corradi [21] e Aceti *et al.* [3], variantes desta formulação são apresentadas para a análise de elementos de Laje de Mindlin e para problemas de placas 3D com simetria de geometria e de carregamento em relação a um plano médio.

Li e Yu [74] desenvolveram uma formulação com base numa função de cedência genérica para materiais friccionais, a qual permite modelar, entre outros, os critérios de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager. Recorrendo a um elemento finito quadrilátero isoparamétrico, o modelo cinemático é derivado resultando num problema de otimização não linear. Analogamente ao modelo anterior, os autores convertem o problema original com restrições num problema de otimização sem restrições utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange. O processo iterativo de resolução assume que todos produzem dissipação. A identificação de elementos que não apresentam dissipação no final de uma dada iteração (sendo por isso a sua expressão da dissipação não diferenciável) é realizada através de uma estratégia passo-a-passo. Para proceder à iteração seguinte introduz-se uma restrição no modelo, com base no método das penalidades, por forma a que a dissipação nestes elementos conserve um valor praticamente nulo.

3.2 Formulações de limite inferior

É usual que, sempre que possível, e em paralelo com o desenvolvimento das formulações fortes de limite superior, os mesmos autores estudem e apresentem as variantes que originam as formulações de limite inferior correspondentes, baseadas nas mesmas técnicas de programação matemática. É dentro desta filosofia que surgem o trabalho de Lyamin e Sloan [83], utilizando desta vez um elemento de equilíbrio, e o trabalho de Makrodimitopoulos e Martin [88] baseado em programação cónica de segunda ordem. De igual modo, também Zouain *et al.* [139] tecem considerações sobre o modo de obter a correspondente formulação de limite inferior.

Como exemplo de uma formulação de limite inferior fraca, refere-se o trabalho de Christiansen [31] que utiliza um modelo misto, de elementos quadriláteros, com uma aproximação do campo de tensões constante e bilinear para o das deformações. Para resolver o problema de otimização resultante, o autor recorre a uma biblioteca de

otimização (comercial) denominada MINOS [96].

3.3 Descontinuidades

A Teoria da Análise Limite prevê a possibilidade de ocorrerem descontinuidades no campo das velocidades. Existem diversas variantes de formulações de limite superior que contemplam estas descontinuidades, combinando-as com um modelo contínuo de elementos finitos. Uma das primeiras abordagens deste tipo pode ser encontrada na formulação proposta por Bottero *et al.* [17], utilizando ainda programação linear.

É prática generalizada, para desenvolvimento das formulações com descontinuidades, possibilitar ao modelo a formação de descontinuidades nas interfaces entre elementos adjacentes, introduzindo para este efeito graus de liberdade adicionais nas interfaces. Exemplo desta abordagem é a formulação apresentada por Sloan e Kleeman [117], onde elementos adjacentes têm nós não partilhados com coordenadas idênticas, conduzindo naturalmente a um aumento de graus de liberdade na malha. Neste trabalho os autores salientam a vantagem de introduzir descontinuidades no modelo como forma de evitar fenómenos de *locking* em formulações fortes.

Em alternativa, Krabbenhøft *et al.* [69] propõe uma formulação que utiliza apenas elementos *contínuos*, sendo as descontinuidades reproduzidas através de conjuntos de elementos degenerados de espessura nula localizados na interface dos elementos. Esta abordagem tem como grande vantagem a facilidade de implementação e ter uma generalidade que a permite, em princípio, adaptar a qualquer formulação contínua de limite superior. Os autores referem ainda que esta abordagem é perfeitamente equivalente a uma estratégia de modelação explícita de descontinuidades.

3.4 Adaptividade

A utilização de algoritmos iterativos, agravada pelo elevado número de graus de liberdade indispensáveis para a obtenção de estimativas de cargas de colapso de elevada precisão, encontra-se inevitavelmente associada a um custo computacional significativo. Para contornar esta dificuldade, diversos autores exploram a aplicação de técnicas de adaptividade com o intuito de melhorar as soluções obtidas, identifi-

cando zonas consideradas críticas, nas quais se procede ao refinamento da malha.

O primeiro aspecto que desde já se destaca é a aparente inexistência na literatura técnica de trabalhos aplicados a estruturas 3D, para as quais a implementação de uma abordagem adaptativa mais se justificaria. Este facto deve-se, sem dúvida, à maior dificuldade associada à geração de malhas conformes 3D. O segundo aspecto observado é que todas as propostas encontradas recorrem a um *refinamento-h*, no qual o tamanho dos elementos da malha, h , é alterado para melhorar a precisão dos resultados, mantendo porém as suas características.

Os primeiros trabalhos apresentando estratégias adaptativas para problemas de Análise Limite datam do início da presente década. Christiansen e Pedersen [32] estudam a utilização de técnicas de refinamento de malhas triangulares, denominadas de refinamento regular e refinamento por bissecção do lado mais longo, combinadas com um critério de refinamento. A utilização de um critério de refinamento, em detrimento do uso de um estimador local de erro, é uma clara limitação do método proposto já que não permite prever um tamanho desejável para os elementos da malha mas somente identificar as regiões a refinar. Os autores propõem e avaliam o desempenho de dois critérios de refinamento distintos. O primeiro é a utilização de uma norma das componentes da taxa de deformação, sendo o segundo baseado na avaliação das tensões que não respeitam o critério de cedência. Dos exemplos numéricos analisados, os autores concluem que todas as combinações de técnicas de refinamento com os critérios propostos revelam um desempenho satisfatório, registando-se entre elas pequenas diferenças de desempenho, que são dependentes do problema em estudo. Contudo, esta abordagem apresenta a limitação de carecer de um estimador local de erro, não permitindo a previsão da dimensão desejável dos novos elementos mas apenas a identificação das regiões a refinar.

Borges *et al.* [15] sugerem a utilização de um estimador local de erro anisotrópico, baseado numa estimativa da matriz Hessiana do campo das velocidades. Assim, os campos do gradiente e, finalmente, da Hessiana das velocidades são obtidos em pontos com base numa média ponderada (pela razão inversa do quadrado da distância) das contribuições de pontos vizinhos (inclusivamente de outros elementos). Este modo de recuperar derivadas de um campo apresenta marcadas semelhanças com a técnica de recuperação preconizada no conhecido método SPR (*Superconvergent Patch Recovery*) proposto por Zienkiewicz e Zhu [138]. Constata-se que a utilização da Hessiana permite uma boa localização de regiões onde um campo regista

variações rápidas ou abruptas. Adicionalmente, a Hessiana constitui um estimador de erro direccional. Esta propriedade é utilizada para produzir uma deformação intencional na malha refinada, orientando e distorcendo os elementos ao longo das discontinuidades identificadas, recorrendo para isso a um gerador de malhas triangulares através da técnica de *advancing front*.

Lyamin *et al.* [80], utilizando a técnica de recuperação proposta no trabalho supra-mencionado, fazem um estudo comparativo de forma a determinar qual o melhor campo a utilizar como estimador de erro, testando as alternativas seguintes: (i) a Hessiana do campo dos multiplicadores de Lagrange, (ii) a Hessiana do campo das velocidades (a proposta inicial de [15]), (iii) o gradiente do campo das velocidades e (iv) o campo dos multiplicadores de Lagrange recuperado. Dos exemplos numéricos analisados concluíram que a hipótese (iii) era a que produzia melhores resultados. Neste trabalho, os autores efectuaram ainda as necessárias adaptações de modo a que o método proposto pudesse contemplar o uso de elementos de descontinuidade. Num trabalho posterior [84], os mesmo autores propuseram ainda uma variante adaptada a formulações de limite inferior. Esta permite ao algoritmo que gera a malha através da técnica de *advancing front*, introduzir regiões com elementos orientados em forma de leque (ilustrado na Figura 3.1), centrados em pontos com singularidades.

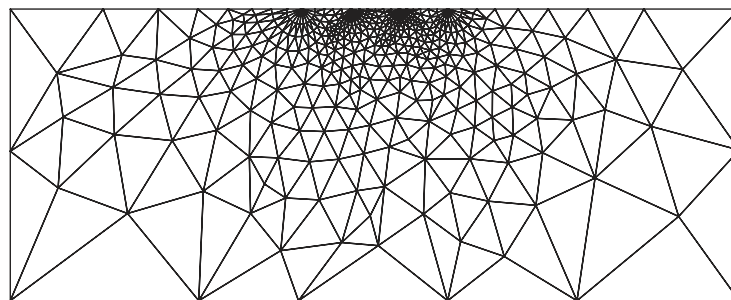


Figura 3.1: Malha com elementos orientados em forma de leque (retirado de [84])

Num trabalho recente, Ciria *et al.* [33] sugerem uma nova abordagem. Utilizando a mesma discretização espacial, o mesmo problema é analisado através de uma formulação de limite superior e a correspondente de limite inferior. Com base no confronto dos resultados das duas análises, os autores propõem um estimador de erro local resultante da diferença entre a energia plástica dissipada num elemento.

Capítulo 4

Formulação de elementos finitos para o problema de análise limite

4.1 Introdução

No presente capítulo procede-se a uma apresentação detalhada do modelo de elementos finitos desenvolvido. Esta formulação resulta de um processo evolutivo que encontra a sua sua génese no modelo cinemático regularizado proposto por Antão[9].

A descrição do modelo desenvolvido neste trabalho é precedida da apresentação da formulação numa sua versão inicial, proposta em [129], procedendo-se, de seguida, à exposição faseada das alterações que foram sendo introduzidas. Entendeu-se que esta opção contribuía para uma melhor compreensão da versão final do modelo aqui proposto.

Porém, antes de prosseguir com esta apresentação convém relembrar um objectivo assumido neste trabalho e que balizou os desenvolvimentos do modelo: considera-se imperativo ser-se capaz de obter limites superiores *estritos* para a estimativa da carga de colapso. Deste modo, os campos cinemáticos dos mecanismos de colapso resultantes das soluções do modelo deverão cumprir todos os requisitos estabelecidos no Teorema Cinemático.

4.2 Formulação inicial

Defina-se uma trajectória de carregamento linear, representada na Figura 4.1, através da introdução do parâmetro de carga, λ . Para tal, considerem-se dois conjuntos de carregamentos distintos: o primeiro é um carregamento variável, definido por uma distribuição de forças de massa, \mathbf{b}_λ , e de forças de fronteira, \mathbf{t}_λ , cuja amplitude é afectada pelo parâmetro de carga, $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$; o segundo é um carregamento fixo, composto por uma distribuição de forças de massa, $\tilde{\mathbf{b}}$, e de forças de fronteira, $\tilde{\mathbf{t}}$.

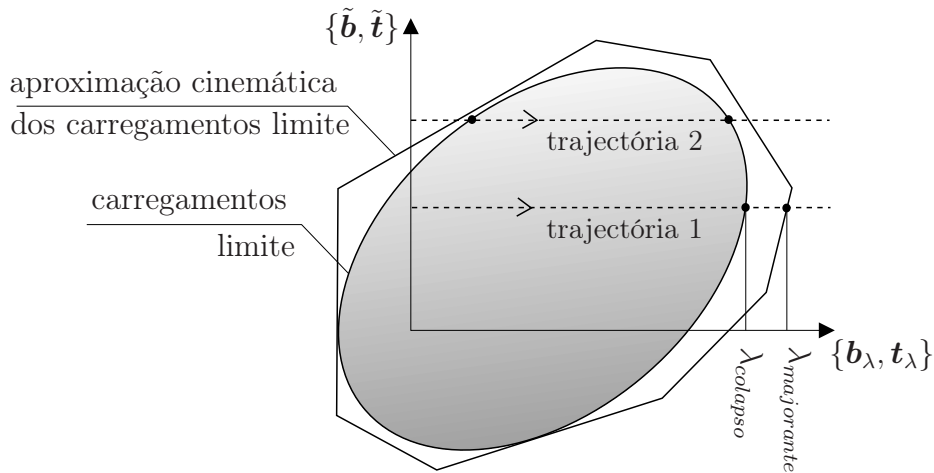


Figura 4.1: Trajectória de carregamento linear

Por forma a garantir a existência de solução única do problema de determinação do parâmetro de carga de colapso, estipula-se que o carregamento fixo seja um carregamento admissível. Esta restrição, ao nível dos carregamentos fixos, inviabiliza trajectórias de carregamento do tipo 2, garantindo a unicidade da solução do problema visto que região dos carregamentos admissíveis é convexa.

Atendendo ao enunciado do Teorema Cinemático (secção 2.3) é possível afirmar que um determinado valor de λ é um majorante do parâmetro de carga de colapso se for possível arranjar um campo cinematicamente admissível, não nulo, para o qual o funcional,

$$J(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{e}}, \lambda) = W_{\mathcal{D}}(\dot{\mathbf{e}}) - \left(\tilde{W}(\dot{\mathbf{u}}) + \lambda W_\lambda(\dot{\mathbf{u}}) \right), \quad (4.1)$$

seja negativo. Na definição (4.1), a taxa do trabalho das forças variáveis, W_λ e a

taxa do trabalho das forças fixas, \widetilde{W} , são definidas por:

$$W_\lambda = \int_{\Omega} \mathbf{b}_\lambda^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}_\lambda^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma, \quad (4.2a)$$

$$\widetilde{W} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{b}}^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \tilde{\mathbf{t}}^T \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (4.2b)$$

Assim, é possível estabelecer se um determinado parâmetro de carga constitui um majorante da carga de colapso através da formulação do seguinte problema de otimização:

$$\text{Min } J(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (4.3a)$$

$$\text{sujeito a: } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} \quad (4.3b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{C}_c \quad (4.3c)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (4.3d)$$

A restrição (4.3b) estabelece a condição de compatibilidade (2.2), agora expressa em forma matricial, onde a matriz \mathbf{B} representa o operador diferencial de compatibilidade. Para o caso mais genérico, o dos problemas tridimensionais, este operador assume o seguinte formato:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Por sua vez, as componentes independentes do tensor da taxa de deformação e as componentes das velocidades são reunidas nos respectivos vectores pela seguinte ordem:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} = 2\dot{\varepsilon}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} = 2\dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{xz} = 2\dot{\varepsilon}_{xz} \end{Bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{u}} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{Bmatrix} \quad (4.5a-b)$$

É possível concluir, com base no Teorema Cinemático, que, no caso do valor do funcional J assumir um valor negativo na solução óptima do problema (4.3), então o parâmetro de carga testado é um majorante da carga de colapso ($\lambda \geq \lambda_{colapso}$). Contrariamente, não se podem retirar quaisquer conclusões sobre a natureza do referido parâmetro de carga; seria necessário experimentar todos os campos cinematicamente admissíveis para se poder inferir acerca da eventual admissibilidade do carregamento.

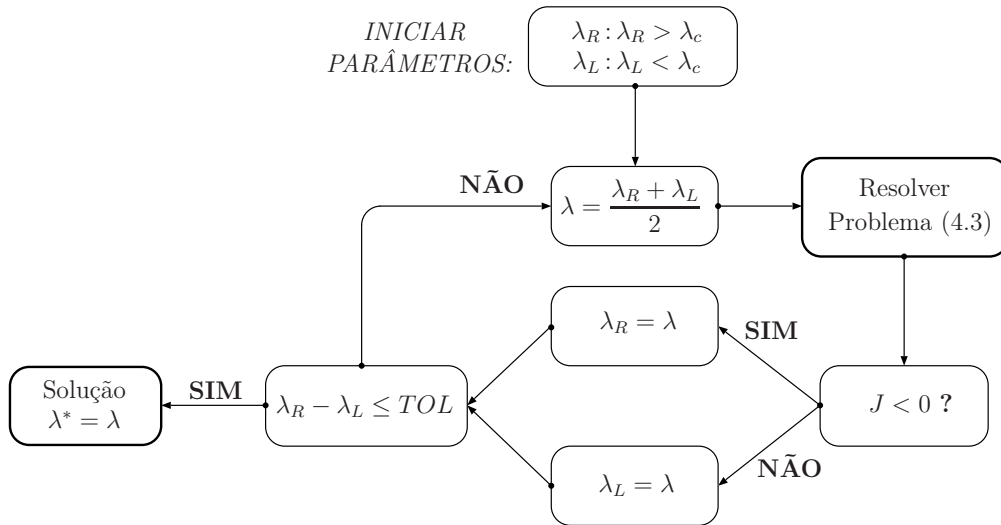


Figura 4.2: Algoritmo de pesquisa do parâmetro de carga de colapso óptimo

Com base nos princípios enunciados, a procura do supremo dos majorantes da carga de colapso em \mathbb{R}^+ pode ser realizada através de algoritmos do tipo do método da bissecção, conforme é esquematizado na Figura 4.2. Em rigor, o algoritmo apresentado não carece de condições tão restritivas como as acima enunciadas para assegurar a sua convergência. Esta fica assegurada desde que exista apenas uma solução no intervalo de pesquisa, $[\lambda_L, \lambda_R]$. Assim, não existe a necessidade de excluir trajectórias do tipo 2 (ver Figura 4.1) com uma escolha criteriosa do intervalo de procura

do parâmetro de carga de colapso, podendo mesmo o domínio de λ ser alargado a $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2.1 Modelo Misto de Elementos Finitos

O problema (4.3) é agora discretizado através da técnica dos elementos finitos. O presente modelo misto caracteriza-se pela adopção de aproximações independentes para dois campos distintos: o campo das velocidades e o campo da taxa das deformações plásticas. Estas aproximações são expressas do seguinte modo:

$$\dot{\mathbf{u}}_i(x, y, z) = \{v_x, v_y, v_z\}_i^T = \mathbf{N}_i(x, y, z)\mathbf{d}_i \quad \text{em } \Omega_i \quad (4.6)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i(x, y, z) = \{\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, 2\dot{\epsilon}_{xy}, 2\dot{\epsilon}_{yz}, 2\dot{\epsilon}_{xz}\}_i^T = \mathbf{e}_i \quad \text{em } \Omega_i \quad (4.7)$$

Na definição 4.6, em referência ao i -ésimo elemento finito representado pelo domínio Ω_i , a matriz \mathbf{N}_i agrupa as funções de aproximação e o vector \mathbf{d}_i contém os pesos das respectivas funções de aproximação, cujo valor representa a velocidade nodal dos elementos finitos. Como funções de aproximação são adoptadas as funções de forma nodais convencionais [136] associadas a elementos de deformação constante, nomeadamente, o elemento triangular de 3 nós para problemas planos e o tetraedro de 4 nós para problemas tridimensionais. Na aproximação do campo da taxa de deformação assume-se que o valor da deformação é constante em cada elemento finito, sendo as componentes da taxa de deformação de cada elemento armazenadas no vector \mathbf{e}_i .

Estabelecidos os critérios de aproximação, prossegue-se com a reformulação do problema inicial de optimização (4.3), que rege o presente modelo, recorrendo ao método do Lagrangeano Aumentado (ver *e.g.* [100]). Através desta abordagem, a condição de compatibilidade (4.3b) é estabelecida de uma forma ponderada na função objectivo através da aplicação de multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\mu}$. A referida condição é reforçada através da introdução de um termo quadrático de penalidade, controlado pelo parâmetro, $r \in \mathbb{R}^+$.

$$\text{Min } \mathcal{L}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\mu}) = J(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2 d\Omega \quad (4.8)$$

sujeito a: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{C}_c$

De um ponto de vista físico os multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$, representam a grandeza dual do campo da taxa de deformação, *i.e.*, o campo das tensões, verificando-se necessariamente para o óptimo da solução do problema (4.8) a consistência energética:

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \quad (4.9)$$

Constate-se que neste novo problema (4.8), a condição de compatibilidade na fronteira (4.3d) foi aparentemente ignorada. No entanto, esta condição ficará automaticamente verificada aquando da introdução no modelo da aproximação do campo das velocidades através da eliminação dos graus de liberdade associados a nós com deslocamentos restringidos, seguindo um procedimento usual do Método do Elementos Finitos (MEF) para a aplicação de condições de fronteira cinemática [136].

Introduzindo agora as aproximações dos campos cinemáticos (4.6) e (4.7) e atendendo à definição (4.1), o funcional Lagrangeano de (4.8) é expandido e redefinido em relação às variáveis discretas do problema do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\mu}) &= \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \mathcal{D}(\mathbf{e}_i) d\Omega - \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{N}_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma i}} \tilde{\mathbf{t}}^T \mathbf{N}_i d\Gamma \right) \mathbf{d}_i \\ &\quad - \lambda \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{b}_{\lambda}^T \mathbf{N}_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma i}} \mathbf{t}_{\lambda}^T \mathbf{N}_i d\Gamma \right) \mathbf{d}_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\mu}_i^T (\mathbf{B}\mathbf{N}_i) d\Omega \mathbf{d}_i - \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{e}_i d\Omega \\ &\quad + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{n_E} \mathbf{d}_i^T \int_{\Omega_i} (\mathbf{B}\mathbf{N}_i)^T (\mathbf{B}\mathbf{N}_i) d\Omega \mathbf{d}_i \\ &\quad - r \sum_{i=1}^{n_E} \mathbf{d}_i^T \int_{\Omega_i} (\mathbf{B}\mathbf{N}_i)^T \mathbf{e}_i d\Omega + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i d\Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.2 Algoritmo de programação matemática

A procura da solução óptima do problema resulta na procura de um ponto de sela do funcional, recorrendo-se para o efeito a uma variante do algoritmo iterativo de Uzawa (ver Figura 4.3) explanada em [47]. O algoritmo de Uzawa, incluindo igualmente nesta denominação as suas variantes, apresenta como principal atractivo para a sua aplicação uma convergência muito robusta. Uma descrição detalhada do algoritmo de Uzawa e das suas propriedades de convergência podem ser encontradas em [47].

Na sua forma original, o algoritmo de Uzawa determina a solução do problema de ponto sela resultante da aplicação do método do Lagrangeano Aumentado, através de um processo iterativo composto por duas etapas distintas [100]. Na primeira etapa, procede-se à minimização da função Lagrangeana em relação às variáveis de optimização primais, representadas por \mathbf{d} e \mathbf{e} no presente problema. Na segunda etapa, realiza-se a actualização das variáveis duais, os multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\mu}$, com base no erro observado nas restrições associadas aos respectivos multiplicadores. Neste caso, a expressão de actualização dos multiplicadores de Lagrange pode ser expressa do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\mu}_i^{k+1} = \boldsymbol{\mu}_i^k + r(\mathbf{B}\mathbf{N}_i\mathbf{d}_i^k - \mathbf{e}_i^k) \quad (4.11)$$

No entanto, em problemas de optimização não-lineares observa-se frequentemente que, tal como sucede neste caso, a minimização da função Lagrangeana, necessária durante a primeira etapa do algoritmo de Uzawa conforme acima descrito, resulta num problema numérico de elevada complexidade. É precisamente com o propósito de ultrapassar esta dificuldade que surge a variante do algoritmo de Uzawa adoptada.

Seguindo a estratégia proposta em [47], é introduzida uma relaxação na minimização requerida na primeira etapa do método de Uzawa. Assim, conforme se observa na Figura 4.3, a minimização é realizada em duas fases, sucessivas e independentes, em relação às variáveis do campo de velocidades, \mathbf{d} , e às do campo da taxa de deformações, \mathbf{e} . Refira-se ser possível demonstrar que a convergência do algoritmo fica assegurada para qualquer valor do número de ciclos de relaxação, m , adoptado [47].

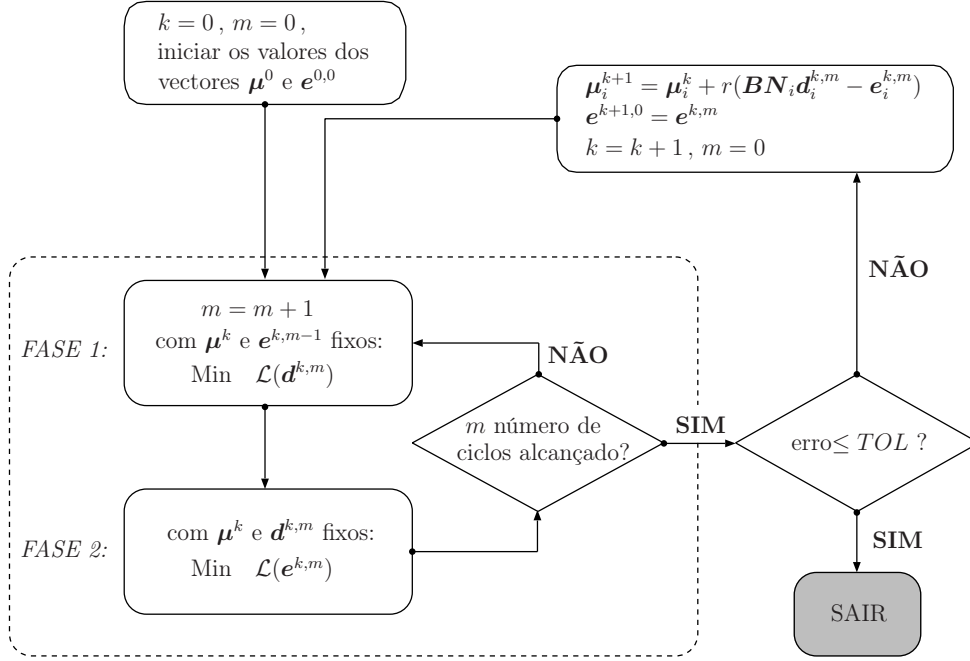


Figura 4.3: Variante do algoritmo de Uzawa

4.2.2.1 Minimização global (FASE 1)

O problema de minimização presente na *FASE 1* do algoritmo de Uzawa (4.3) é denominado de minimização global, uma vez que, ao ser realizada em relação ao campo de velocidades, envolve, simultaneamente, a contribuição de todos os elementos finitos que discretizam o domínio. Esta minimização passa pela determinação do ponto de estacionaridade do funcional de Lagrange (4.10) em relação à variável primal \mathbf{d} ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

A condição (4.12) resulta num sistema de equações lineares, expresso do seguinte modo:

$$r \mathbf{A} \mathbf{d}^{k,m} = \lambda \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}} - \boldsymbol{\Lambda}^k + \mathbf{L}^{k,m-1} \quad (4.13)$$

onde,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} (\mathbf{B}\mathbf{N}_i)^T (\mathbf{B}\mathbf{N}_i) d\Omega \quad (4.14a)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{N}_i^T \tilde{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma i}} \mathbf{N}_i^T \tilde{\mathbf{t}} d\Gamma \right) \quad (4.14b)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{N}_i^T \mathbf{b}_\lambda d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma i}} \mathbf{N}_i^T \mathbf{t}_\lambda d\Gamma \right) \quad (4.14c)$$

$$\mathbf{\Lambda}^k = \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} (\mathbf{B}\mathbf{N}_i)^T (\boldsymbol{\mu}_i)^k d\Omega \quad (4.14d)$$

$$\mathbf{L}^{k,m-1} = r \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} (\mathbf{B}\mathbf{N}_i)^T (\mathbf{e}_i)^{k,m-1} d\Omega \quad (4.14e)$$

É importante salientar que a matriz do sistema governativo, \mathbf{A} , permanece inalterada no decorrer de todo o processo iterativo. Apenas os termos independentes, $\mathbf{\Lambda}$ e \mathbf{L} , registam modificações nos seus valores. Este facto é de grande importância do ponto de vista da eficiência numérica, já que permite que o cálculo dos termos e a factorização da matriz sejam realizados apenas uma vez. Assim, a obtenção da solução do problema (4.13) resume-se à execução de um processo combinado de substituição directa e retrossubstituição do termo independente, com a matriz \mathbf{A} previamente factorizada, pouco dispendioso no que respeita ao tempo de cálculo.

Por último, refere-se que o cálculo e *assemblagem* do sistema governativo (4.13) podem ser realizados de forma análoga aos procedimentos convencionalmente preconizados para o MEF [136].

4.2.2.2 Minimização local (*FASE 2*)

Na *FASE 2* procede-se a uma minimização do funcional de Lagrangeano (4.10) em relação à variável primal \mathbf{e} associada à aproximação do campo da taxa de deformações. Em contraste com a minimização precedente e uma vez que a aproximação adoptada para o campo da taxa de deformações é restrita a cada elemento, a minimização desta fase pode ser realizada elemento a elemento, de modo independente. Desta forma, designa-se a presente de minimização local.

Eliminando do funcional Lagrangeano os termos não afectados pela variável primal de decisão \mathbf{e} , resulta:

$$\mathcal{L}_i^*(\mathbf{e}_i) = \int_{\Omega_i} \mathcal{D}(\mathbf{e}_i) d\Omega - \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{e}_i d\Omega - r \int_{\Omega_i} (\mathbf{B}\mathbf{N}_i \mathbf{d}_i)^T \mathbf{e}_i d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega_i} \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i d\Omega \quad (4.15)$$

A fim de simplificar a notação utilizada, as expressões são aqui escritas sem os índices k e m referentes aos ciclos do algoritmo de Uzawa.

Introduzindo agora a definição do vector \mathbf{s} ,

$$\mathbf{s}_i = \{s_x, s_y, s_z, 2s_{xy}, 2s_{yz}, 2s_{zx}\}_i^T = \boldsymbol{\mu}_i + r \mathbf{B}\mathbf{N}_i \mathbf{d}_i \quad (4.16)$$

o qual reúne as componentes do tensor \mathbf{S}_i ,

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{yz} & s_z \end{bmatrix}_i \quad (4.17)$$

na expressão (4.15), o problema de minimização local pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \mathcal{L}_i^*(\mathbf{e}_i) = \mathcal{D}(\mathbf{e}_i) - \mathbf{s}^T \mathbf{e}_i + \frac{r}{2} \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{e}_i \in \mathcal{C}_c \end{aligned} \quad (4.18)$$

Tendo em consideração que o campo da taxa de deformação é assumido como constante em cada elemento, foi possível eliminar o integral no domínio da função objectivo (4.15) sem afectar a solução óptima do problema.

Uma característica não-linear é conferida ao problema de minimização local através da expressão da dissipação, $\mathcal{D}(\mathbf{e}_i)$, e/ou da condição de normalidade, $\mathbf{e}_i \in \mathcal{C}_c$. O facto de se tratar de uma minimização não-linear sujeita a restrições aumenta a complexidade deste problema comparativamente ao problema de minimização global da *FASE 1*. No entanto, o número reduzido do número de variáveis locais, respectivamente 3 ou 6 deformações por elemento no caso de problemas planos ou 3D, contribui significativamente para a simplificação do problema. Esta pode ser considerada como uma das estratégias fundamentais da abordagem adoptada neste trabalho: tendo como ponto de partida um problema inicial não linear de elevada

complexidade, transformá-lo de modo a que as dificuldades inerentes à não linearidade sejam transpostas através da resolução de um conjunto de sub-problemas não lineares de optimização, independentes entre si, de menor dimensão e consequentemente de mais fácil resolução.

Com o intuito de reduzir ainda mais as dimensões do espaço das variáveis de decisão, o problema (4.18) é reformulado agora no espaço das direcções principais do tensor da taxa de deformação, de acordo com trabalho desenvolvido em [72], atingido a sua forma final, expressa do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{L}_i^*(\tilde{\mathbf{e}}_i) &= \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{e}}_i) - \tilde{\mathbf{s}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_i + \frac{r}{2} \tilde{\mathbf{e}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_i \\ \text{sujeito a: } \tilde{\mathbf{e}}_i &\in \mathcal{C}_c \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde o vector, $\tilde{\mathbf{e}}_i = \{e_I, e_{II}, e_{III}\}_i^T$, reúne as componentes principais da taxa de deformação, sendo que o vector $\tilde{\mathbf{s}}_i = \{s_I, s_{II}, s_{III}\}_i^T$ é composto pelos valores próprios do tensor \mathbf{S}_i , ordenados decrescentemente. É ainda demonstrado em [72] que a seguinte transformação de coordenadas se verifica,

$$\begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_z \end{bmatrix}_i = \mathbf{Y}_i \begin{bmatrix} e_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & e_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & e_{III} \end{bmatrix}_i \mathbf{Y}_i^T \quad (4.20)$$

onde a matriz de transformação \mathbf{Y}_i agrupa em colunas os vectores próprios normalizados do tensor, \mathbf{S}_i , associados aos seus valores próprios. Por último, refere-se que devido à definição das expressões da dissipação, \mathcal{D} , tendo por base a assunção de um comportamento isotrópico para materiais, é fácil concluir que a ordenação adoptada para o vector $\tilde{\mathbf{s}}_i$ se reflecte de igual modo na ordenação das componentes da taxa de deformação,

$$e_I \geq e_{II} \geq e_{III} \quad (4.21)$$

As estratégias adoptadas para a resolução do problema (4.19) diferem consoante o tipo de critério de cedência adoptado. Na secção 5.3, as estratégias numéricas de minimização local são apresentadas e discutidas em detalhe para os diferentes critérios utilizados. Desde já se adianta que as abordagens utilizadas distinguem-se essencialmente consoante os materiais exibam um comportamento friccional ou apresentem

um comportamento puramente coesivo.

4.2.3 Observações finais sobre a formulação inicial

Para concluir a apresentação da formulação inicial tecem-se algumas considerações sobre características e comportamento da mesma.

4.2.3.1 Majorantes rigorosos de cargas de colapso

Esta primeira observação sublinha o facto do modelo ser capaz de produzir majorantes rigorosos de cargas de colapso, querendo com esta afirmação dizer-se que existe um cumprimento estrito dos pressupostos enunciados Teorema Cinemático. Embora as condições de compatibilidade sejam impostas na função Lagrangeana (4.8) de uma forma ponderada, estando-se por isso na presença de uma formulação dita fraca, a escolha criteriosa das aproximações adoptadas para os campos cinemáticos (4.6 e 4.7) confere ao modelo a capacidade de cumprir localmente as condições de compatibilidade. Assim sendo, o modelo produz soluções cinematicamente admissíveis e consequentemente majorantes rigorosos para as cargas de colapso.

4.2.3.2 Problemas de *locking*

O objectivo de obter uma formulação de elementos finitos baseada no estrito cumprimento do Teorema Cinemático força o recurso à utilização de funções de aproximação de grau reduzido, de modo a ser possível respeitar a condição de normalidade do escoamento plástico (4.3c) em todos os pontos do domínio do elemento. No presente caso recorre-se a funções lineares e constantes para a aproximação do campo das velocidades e da taxa de deformação, respectivamente.

A referida condição de normalidade introduz no modelo uma restrição acrescida, reduzindo os seus graus de liberdade efectivos. No caso de materiais puramente coesivos, como os critérios de Tresca e de von Mises, resulta que o escoamento plástico se deve processar em condições de incompressibilidade volumétrica, para problemas de deformação plana e problemas 3D, traduzidas pelas condições (2.14) e (2.20). Deste modo, fenómenos de *locking* são susceptíveis de ocorrer. O *locking*

é um problema numérico bem documentado na literatura (ver *e.g.* [59], [137]) que algumas formulações de elementos finitos revelam, devido ao qual as soluções obtidas demonstram uma perda significativa de qualidade, resultado de uma rigidez excessiva do modelo. Esta anomalia numérica é muitas vezes originada devido à imposição de condições de incompressibilidade.

Para os critérios friccionais considerados (Mohr-Coulomb e Drucker-Prager) a condição de normalidade é expressa através de uma desigualdade, (2.23) e (2.26), que é de certa forma menos restritiva do que a igualdade imposta para os materiais puramente coesivos. Contudo a situação de desigualdade, correspondente a estados de tensão localizados no ápex das superfícies de cedência, Figura 2.4(c,d), não é usualmente solicitada, prevalecendo a situação de igualdade. Deste modo, a utilização de materiais friccionais não elimina a possibilidade de ocorrência de fenómenos de *locking*, conforme é demonstrado em [16], ainda que mais atenuados pela activação da hipótese de desigualdade na condição de normalidade.

É possível eliminar este efeito, para o caso de problemas de deformação plana, recorrendo a um arranjo especial dos elementos finitos evidenciado em [98]. Assim, conforme é representado na Figura 4.4(a), cada conjunto de 4 triângulos deverá formar um quadrilátero, sendo importante verificar que o nó central se localiza na intersecção das diagonais.

Para as malhas 3D segue-se um procedimento similar, ilustrado na Figura 4.4(b). Cada conjunto de 24 tetraedros deverá formar um hexaedro. Cada um dos tetraedros deverá ser formado por dois nós posicionados nos vértices do hexaedro, um nó localizado a meio de uma das faces do hexaedro na intersecção das diagonais, e por último o nó central correspondente ao baricentro do hexaedro. É importante sublinhar que com o arranjo anteriormente descrito pretende-se apenas mitigar o efeito de *locking*, visto que esse não garante sua supressão. Contrariamente ao caso 2D, não foi possível encontrar na literatura a descrição de um arranjo para elementos tetraédricos de 4 nós que demonstrasse ser comprovadamente eficaz.

4.2.3.3 Determinação de cargas de colapso

Numa primeira análise do algoritmo de pesquisa do parâmetro de carga de colapso (Figura 4.2) deprender-se-ia que para determinar se cada valor do parâmetro de

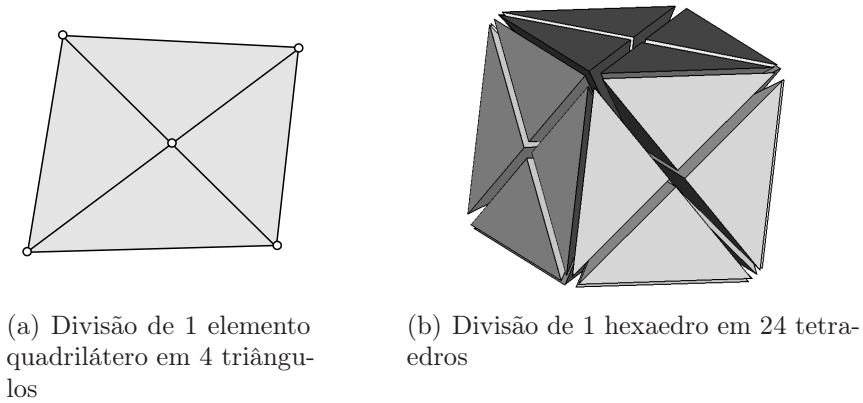


Figura 4.4: Arranjo de elementos 2D e 3D para mitigar o efeito de *locking*

carga testado, λ , majora o valor correspondente à rotura é necessário obter a solução do problema (4.3) para o valor do parâmetro de carga em questão. A verificação deste facto comprometeria necessariamente a aplicabilidade do método apresentado visto que o custo computacional requerido para a resolução de um problema tornar-se-ia incomportável. Mostra-se no entanto que tal não é necessário.

De facto, observe-se que para qualquer valor *interior* do parâmetro de carga, denominando-se como *interior* um valor para o qual a solução no óptimo do problema (4.3) verifique,

$$J(\lambda) \geq 0, \quad (4.22)$$

a solução é necessariamente um mecanismo nulo, já que a este corresponde um valor igualmente nulo do funcional, J . Verifica-se que para valores interiores, fora da vizinhança da solução do algoritmo da Figura 4.2, o algoritmo de Uzawa exhibe, após um número reduzido de iterações, o seguinte comportamento:

$$J(\mathbf{d}^k, \mathbf{e}^k) > J(\mathbf{d}^{k+1}, \mathbf{e}^{k+1}) > \dots > J(\mathbf{d}^{k+n}, \mathbf{e}^{k+n}) \geq 0 \quad (4.23)$$

Para um valor do parâmetro de carga dito *exterior*, caracterizado por,

$$J(\lambda) < 0, \quad (4.24)$$

e admitindo também que este se encontra fora da vizinhança da solução do algoritmo da Figura 4.2, o problema (4.3) tal como é formulado resulta num problema de

solução não limitada, para o qual,

$$J(\lambda) \rightarrow -\infty \quad (4.25)$$

Neste caso, o algoritmo de Uzawa exhibe, após um número reduzido de iterações, uma tendência acentuada para o decréscimo do valor do funcional J ,

$$0 > J(\mathbf{d}^k, \mathbf{e}^k) > J(\mathbf{d}^{k+1}, \mathbf{e}^{k+1}) > \dots >> J(\mathbf{d}^{k+n}, \mathbf{e}^{k+n}) \quad (4.26)$$

Deste modo, é possível determinar uma vizinhança para o parâmetro de carga de colapso, recorrendo a um número global pouco significativo de iterações do algoritmo de Uzawa.

Contudo, entrando na vizinhança da solução e embora as causas que originam os comportamentos anteriormente descritos permaneçam válidas, estes últimos manifestam-se de forma menos pronunciada. Este fenómeno resulta, para alguns problemas, na necessidade de um acréscimo relevante do número de iterações do algoritmo de Uzawa necessárias para se poder retirar conclusões quanto à natureza (*interior/exterior*) do valor do parâmetro de carga a testado. A prática revela que a sensibilidade a este problema é dependente do problema analisado, verificando-se por regra que a utilização de materiais com critérios friccionais com ângulos de atrito elevados acentua este fenómeno. Naturalmente, este problema prejudica o desempenho da implementação numérica da formulação no que respeita aos custos computacionais, sendo um dos aspectos que se tentou melhorar durante o presente trabalho de investigação.

Por último refere-se que, para o majorante óptimo da carga de colapso, λ^* , o problema (4.3) tem uma solução degenerada múltipla. Para mostrar este facto basta observar que, sendo a dissipação plástica por unidade de volume, \mathcal{D} , uma função homogénia de grau 1, qualquer mecanismo não nulo, obtido a partir do mecanismo de colapso através da aplicação de um factor de escala, κ , é também ele necessariamente um mecanismo de colapso,

$$W_{\mathcal{D}}(\mathbf{e}^*) = W_e(\mathbf{d}^*, \lambda^*) \Rightarrow W_{\mathcal{D}}(\kappa \cdot \mathbf{e}^*) = W_e(\kappa \cdot \mathbf{d}^*, \lambda^*), \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}^+ \quad (4.27)$$

4.3 Formulação dual do modelo inicial

Nesta secção é descrita a dedução de uma formulação dual do modelo inicial. Esta será aqui apresentada tendo como ponto de partida o seguinte princípio: a solução óptima do problema (4.3), para um parâmetro de carga *interior*, é um campo cinemático nulo. A validade da afirmação anterior pode ser facilmente demonstrada, bastando para isso constatar que o valor da função objectivo para um campo nulo é também ele nulo ($J = 0$) e que qualquer outra solução que melhore a minimização do valor da função objectivo ($J < 0$) não é por definição um parâmetro de carga *interior*. Adicionalmente, salienta-se que, no limite, o maior parâmetro de carga *interior*, na transição para os parâmetro de carga *exteriores*, é um majorante da carga de colapso: o melhor para a discretização adoptada.

Deste modo, torna-se imprescindível determinar quais as condições que devem ocorrer para que a solução do problema (4.8) seja nula:

$$\begin{cases} \mathbf{d} = 0 \\ \mathbf{e} = 0 \end{cases} \quad (4.28\text{a-b})$$

Da análise do algoritmo iterativo de resolução pode-se constatar que, para obter uma solução nula, é necessário que ambas as soluções do problemas de minimização global e local sejam consecutivamente nulas. Entenda-se por soluções consecutivamente nulas aquelas em que, da iteração k para a iteração seguinte, $k + 1$, se observa que os valores das incógnitas permanecem nulos,

$$\mathbf{d}^k = \mathbf{e}^k = 0 \Rightarrow \mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{e}^{k+1} = 0 \quad (4.29)$$

Note-se agora que, sendo a matriz do sistema governativo global (4.13) não singular, a obtenção de uma solução nula só é possível caso o termo independente deste sistema seja igualmente nulo. Atendendo às definições (4.13) e (4.14), a condição enunciada para o termo independente pode ser expressa do seguinte modo:

$$\lambda \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{\Lambda} = 0 \quad (4.30)$$

Considera-se indispensável interpretar o significado de (4.30). Para tal, comece-se

por reescrever a condição de equilíbrio (2.34), desta feita de uma forma matricial,

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} + (\tilde{\mathbf{b}} + \lambda \mathbf{b}_\lambda) = 0 \quad (4.31)$$

Impondo esta condição sob a forma de resíduos pesados, através do método de Galerkin [137], utilizando como funções de peso as funções de aproximação do campo das velocidades, \mathbf{N} , vem:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\tilde{\mathbf{b}} + \lambda \mathbf{b}_\lambda) \, d\Omega = 0 \quad (4.32)$$

Em seguida, procede-se à integração por partes do termo das tensões, obtendo-se,

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{BN})^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \, d\Gamma = - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\tilde{\mathbf{b}} + \lambda \mathbf{b}_\lambda) \, d\Omega \quad (4.33)$$

onde \mathbf{n} simboliza a matriz que reúne as componentes do vetor da normal exterior à fronteira, de acordo com o operador diferencial de equilíbrio, \mathbf{B}^T . Esta última assume a seguinte configuração no caso específico dos problemas tridimensionais:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & \cdot & \cdot & n_y & \cdot & n_z \\ \cdot & n_y & \cdot & n_x & n_z & \cdot \\ \cdot & \cdot & n_z & \cdot & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Atendendo à condição de equilíbrio (2.35) o termo de fronteira presente em (4.33) pode ser reescrito, resultando:

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{BN})^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T (\tilde{\mathbf{t}} + \lambda \mathbf{t}_\lambda) \, d\Gamma = - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\tilde{\mathbf{b}} + \lambda \mathbf{b}_\lambda) \, d\Omega \quad (4.35)$$

Prosegue-se assumindo que o campo das tensões é aproximado por um campo constante em cada elemento, utilizando-se as variáveis duais do problema inicial, $\boldsymbol{\mu}$, para exprimir esta aproximação,

$$\boldsymbol{\sigma}_i(x, y, z) = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}_i^T = \boldsymbol{\mu}_i \quad \text{em } \Omega_i \quad (4.36)$$

Finalmente, introduzindo em (4.33) a aproximação do campo das tensões (4.36)

resulta a condição discreta de equilíbrio da formulação:

$$\mathbf{B}^* \boldsymbol{\mu} = \lambda \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}} \quad (4.37)$$

em que,

$$\mathbf{B}^* = \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} (\mathbf{B} \mathbf{N}_i)^T d\Omega \quad (4.38)$$

Para concluir, salienta-se que, da comparação das expressões (4.30) e (4.37), facilmente se constata que estas são perfeitamente equivalentes.

A condição de equilíbrio (4.37) não é, porém, suficiente para garantir a solução (4.28). Com efeito, é ainda necessário que a solução do problema de minimização local (4.19) seja igualmente nula. Para tal, comece-se por observar que, em resultado de (4.28a), a expressão (4.16) que define o vector \mathbf{s} é simplificada,

$$\mathbf{s}_i = \boldsymbol{\mu}_i \quad (4.39)$$

Atendendo a este facto, a expressão da função objectivo do problema (4.19), pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L}_i^*(\tilde{\mathbf{e}}_i) = \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{e}}_i) - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_i + \frac{r}{2} \tilde{\mathbf{e}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (4.40)$$

onde, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$ é o vector que reúne as componentes principais das tensões.

Demonstra-se de seguida que, para que a solução óptima do problema local (4.19) seja nula, basta, recorrendo à função de cedência, impor:

$$f(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i) \leq 0 \quad (4.41)$$

Com efeito, constate-se que $\tilde{\mathbf{e}}_i$ tem de obedecer à regra da normalidade por restrição imposta em (4.19). Assim sendo, o PTPM garante que, caso a condição (4.41) se verifique, se obtém o seguinte resultado:

$$\mathcal{D}(\tilde{\mathbf{e}}_i) - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_i \geq 0 \Rightarrow \mathcal{L}_i^*(\tilde{\mathbf{e}}_i) \geq 0 \quad (4.42)$$

Em consequência, a solução óptima de (4.19) é necessariamente, $\tilde{\mathbf{e}}_i = 0$.

Note-se que, não se verificando a condição de cedência (4.41), é possível definir a

seguinte decomposição para o vector $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$ (ver Figura 4.5):

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i = \boldsymbol{\mu}_s + \boldsymbol{\mu}_e \mid f(\boldsymbol{\mu}^s) = 0 \quad (4.43)$$

Atendendo à decomposição anterior, a função objectivo (4.40) para deformações, $\tilde{\boldsymbol{e}}_{i,s}$, associadas ao estado de tensão, $\boldsymbol{\mu}_s$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_i^*(\tilde{\boldsymbol{e}}_{i,s}) = -\boldsymbol{\mu}_e^T \tilde{\boldsymbol{e}}_{i,s} + \frac{r}{2} \tilde{\boldsymbol{e}}_{i,s}^T \tilde{\boldsymbol{e}}_{i,s} \quad (4.44)$$

Convém sublinhar que, sendo o vector, $\tilde{\boldsymbol{e}}_{i,s}$, uma normal exterior à superfície de cedência (que delimita um espaço convexo), o valor do produto interno, $\boldsymbol{\mu}_e^T \tilde{\boldsymbol{e}}_{i,s}$, é necessariamente positivo, concluindo-se então que, neste caso e contrariamente ao pretendido, a solução óptima não seria nula.

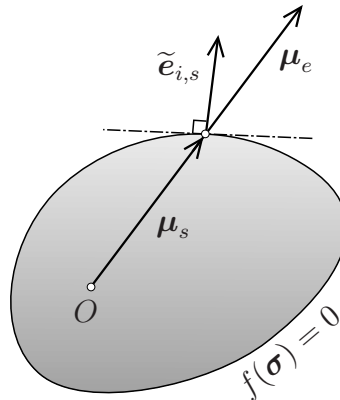


Figura 4.5: Decomposição do vector, $\boldsymbol{\mu}_i$

Face ao exposto, é finalmente possível formular o problema de optimização do modelo dual:

$$\text{Máx } \lambda \quad (4.45a)$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{B}^* \boldsymbol{\mu} = \lambda \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}} \quad (4.45b)$$

$$f(\boldsymbol{\mu}_i) \leq 0 \quad (4.45c)$$

É interessante notar que esta definição tem a forma habitualmente associada às formulações de limite inferior, baseadas no Teorema Estático; todavia, tendo em conta a forma como foi realizada a sua dedução, a solução desta formulação produzirá

necessariamente um majorante da carga de colapso.

4.3.1 Estratégia de resolução do problema dual

Considere-se o seguinte sistema de equações, proveniente da restrição (4.45b),

$$\Theta \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (4.46)$$

em que, Θ é uma matriz de dimensão $n \times m$, com $n > m$, composta pelos blocos \mathbf{B}^* e \mathbf{F} ,

$$\Theta = [\mathbf{B}^* | -\mathbf{F}] \quad (4.47)$$

e o vector das incógnitas do problema, \mathbf{z} , apresenta a seguinte estrutura:

$$\mathbf{z} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\mu} \\ \lambda \end{array} \right\} \quad (4.48)$$

Através de uma Decomposição em Valores Singulares (SVD, adoptando o usual acrónimo inglês de Singular Value Decomposition), a solução do sistema subdefinido pode ser expressa do seguinte modo:

$$\mathbf{z} = \mathbf{w} + \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (4.49)$$

onde o vector \mathbf{w} é uma solução possível do sistema de equações (4.46), as colunas da matriz \mathbf{M} formam uma base do espaço nulo da matriz Θ e o vector \mathbf{x} é uma nova incógnita do problema, definindo o peso da combinação linear das colunas de Θ . Os vectores da base são normalizados por forma a,

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{I} \quad (4.50)$$

É de salientar que a necessidade de uma factorização SVD, com o custo computacional que ela acarreta, contribuem negativamente para o desempenho desta formulação, inviabilizando a sua competitividade face à formulação primal correspondente.

Recorrendo ao método do Lagrangeano Aumentado e considerando o resultado (4.49) obtém-se o seguinte problema de minimização, equivalente ao problema do modelo

dual (4.45),

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{L}_d(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{w} + \mathbf{M} \mathbf{x} - \mathbf{z}) + \frac{r}{2} |\mathbf{w} + \mathbf{M} \mathbf{x} - \mathbf{z}|^2 \\ \text{sujeito a: } f(\boldsymbol{\mu}_i) &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ representa o vector dos multiplicadores de Lagrange da formulação dual e a definição do vector, \mathbf{C}^T , é dada por,

$$\mathbf{C}^T = \{0, \dots, 0, -1\}^T \quad (4.52)$$

Analogamente à formulação primal, recorre-se à variante do algoritmo de Uzawa com relaxação para resolver o problema (4.51). Assim, da condição de estacionaridade em relação à variável \mathbf{x} , obtém-se,

$$\frac{\mathcal{L}_d(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \Rightarrow r \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{M}^T (-(\mathbf{C} + \boldsymbol{\eta}) - r(\mathbf{w} - \mathbf{z})) \quad (4.53)$$

Atendendo a (4.50) obtém-se seguinte expressão, que permite proceder à etapa de minimização global:

$$\mathbf{x}^{k,m} = \mathbf{M}^T \left(-\frac{1}{r} (\mathbf{C} + \boldsymbol{\eta}^k) - \mathbf{w} + \mathbf{z}^{k,m-1} \right) \quad (4.54)$$

Por sua vez, da condição de estacionaridade em relação à variável, \mathbf{z} , obtém-se,

$$\frac{\mathcal{L}_d(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{z}} = 0 \Rightarrow \mathbf{z} = \frac{1}{r} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{w} + \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (4.55)$$

Com base no resultado anterior, é possível obter a solução da minimização global através da projecção sobre a superfície de cedência das soluções obtidas que não satisfaçam a restrição (4.45c). Este procedimento é descrito em detalhe para as restrições da formulação primal no Capítulo 5, sendo trivial a sua adaptação à formulação dual.

Por fim, menciona-se que a actualização dos multiplicadores de Lagrange é realizada através da seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\eta}^{k+1} = \boldsymbol{\eta}^k + r(\mathbf{w} + \mathbf{M} \mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k) \quad (4.56)$$

4.4 Formulação proposta

Apresentam-se nesta secção as inovações introduzidas na formulação inicial anteriormente descrita. Este desenvolvimentos resumem-se em quatro aspectos, explanados em seguida.

A primeira inovação consiste na imposição de uma escala ao mecanismo de colapso através da normalização do trabalho produzido pelo carregamento variável. Esta medida conduz à reformulação do problema de optimização (4.3), permitindo que a solução do novo problema corresponda ao parâmetro da carga de colapso óptima. Deste modo, evita-se a necessidade de testar diversos parâmetros de carga, resultantes de um algoritmo auxiliar de pesquisa da carga de colapso, como o indicado na Figura 4.2. Paralelamente, fica igualmente excluído o fenómeno de degeneração da solução no óptimo com a possibilidade de ocorrência de múltiplas soluções, referida na secção 4.2.3.3 aquando da análise do algoritmo de determinação de cargas de colapso.

A segunda inovação processa-se a dois níveis bem distintos:

- i. a passagem de uma formulação dita fraca para uma formulação dita forte. A condição de compatibilidade (4.3b) imposta ponderadamente no funcional Lagrangeano (4.8), passará a ser imposta localmente. Esta alteração conceptual foi realizada de forma a permitir a fácil introdução no modelo da modificação subsequente, continuando a garantir a verificação estrita dos pressupostos estabelecidos no Teorema Cinemático;
- ii. o enriquecimento do grau das funções de aproximação. A formulação é generalizada por forma a comportar a utilização de elementos finitos com velocidades quadráticas correspondendo a taxas de deformação lineares.

A terceira inovação consiste na introdução de descontinuidades no campo de velocidades. Para este efeito foram estudadas duas estratégias distintas. Na primeira, as descontinuidades no campo de velocidades são simuladas através de fortes gradientes no campo das taxas de deformação, introduzindo, na interface de dois elementos adjacentes, elementos degenerados de volume nulo. Esta estratégia consiste na adaptação para a presente formulação da abordagem proposta em [69]. Alternativamente,

foram desenvolvidos elementos de descontinuidade. Neste caso, as descontinuidades no campo das velocidades são introduzidas de um modo explícito no modelo.

A quarta e última inovação resulta de modificações no algoritmo de Uzawa, de modo a melhorar o seu desempenho no que respeita à rapidez de convergência. Estas alterações passam, fundamentalmente, pela implementação de uma estratégia para estimar o melhor valor inicial do parâmetro de penalidade, r , combinada com um procedimento de actualização do respectivo valor no decorrer do processo iterativo.

4.4.1 Normalização do trabalho do carregamento variável

Considere-se a seguinte condição que permite escalar todos os mecanismos plásticos de modo a que o trabalho efectuado pelo carregamento variável seja unitário,

$$W_\lambda(\dot{\mathbf{u}}) = 1 \quad (4.57)$$

Adicionalmente, e como corolário do Teorema Cinemático, um majorante para parâmetro de carga de colapso, λ_c , pode ser estabelecido para qualquer mecanismo cinematicamente admissível através da seguinte expressão:

$$\lambda = \frac{W_{\mathcal{D}} - \widetilde{W}}{W_\lambda} \geq \lambda_c \quad \Rightarrow \quad \lambda W_\lambda + \widetilde{W} = W_{\mathcal{D}} \quad (4.58)$$

Em consequência, introduzindo (4.57) em (4.58), a definição da expressão de um majorante da carga de colapso resume-se a,

$$\lambda = W_{\mathcal{D}} - \widetilde{W} \quad (4.59)$$

Esta conclusão permite obviar a estratégia de determinação da carga de colapso anteriormente delineada através da resolução de um único problema de programação

matemática, expresso do seguinte modo:

$$\text{Min } \lambda(\mathbf{u}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = W_{\mathcal{D}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \widetilde{W}(\mathbf{u}) \quad (4.60a)$$

$$\text{sujeito a: } W_{\lambda}(\mathbf{u}) = 1 \quad (4.60b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} \quad (4.60c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{C}_c \quad (4.60d)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (4.60e)$$

Analogamente ao procedimento adoptado para o problema (4.3), a condição de compatibilidade (4.60c) é introduzida ponderadamente na função objectivo (4.60a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange, sendo reforçada através de um termo de penalização quadrática. Adicionalmente, é também introduzida a condição de normalização (4.60b) na função objectivo, recorrendo de igual modo ao método dos multiplicadores de Lagrange, sem acrescentar, no entanto, o termo suplementar de penalização. Deste modo, o problema resultante da aplicação do método do Lagrangeano Aumentado pode ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\mu}, \mu_{\lambda}) = & \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, d\Omega - \widetilde{W}(\mathbf{u}) + \mu_{\lambda}(1 - W_{\lambda}) \\ & + \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2 \, d\Omega \quad (4.61) \end{aligned}$$

$$\text{sujeito a: } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{C}_c$$

onde μ_{λ} é o multiplicador de Lagrange associado à condição de normalização (4.60b). Substituindo na função Lagrangeana as aproximações adoptadas para os campos cinemáticos (4.6) e (4.7) obtém-se,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\mu}, \mu_\lambda) &= \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \mathcal{D}(\mathbf{e}_i) \, d\Omega - \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{N}_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma_i}} \tilde{\mathbf{t}}^T \mathbf{N}_i \, d\Gamma \right) \mathbf{d}_i \\
&+ \mu_\lambda - \mu_\lambda \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{b}_\lambda^T \mathbf{N}_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma_i}} \mathbf{t}_\lambda^T \mathbf{N}_i \, d\Gamma \right) \mathbf{d}_i \\
&+ \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\mu}_i^T (\mathbf{B} \mathbf{N}_i) \, d\Omega \mathbf{d}_i - \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{e}_i \, d\Omega \\
&+ \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{n_E} \mathbf{d}_i^T \int_{\Omega_i} (\mathbf{B} \mathbf{N}_i)^T (\mathbf{B} \mathbf{N}_i) \, d\Omega \mathbf{d}_i \\
&- r \sum_{i=1}^{n_E} \mathbf{d}_i^T \int_{\Omega_i} (\mathbf{B} \mathbf{N}_i)^T \mathbf{e}_i \, d\Omega + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i \, d\Omega
\end{aligned} \tag{4.62}$$

É de sublinhar as semelhanças entre a expressão anterior (4.62) e a função Lagrangeana da formulação inicial (4.10), diferindo apenas nos termos da 2ª linha associados ao carregamento exterior. Este facto permite manter inalterados praticamente todos os procedimentos seguidos no algoritmo de Uzawa. A exceção é feita apenas para a execução da minimização global (*FASE 1*), onde a condição de estacionaridade do funcional Lagrangeano em relação à variável primal, \mathbf{d} , é agora simultaneamente imposta também em relação à variável dual, μ_λ . Assim, a condição (4.12) é substituída por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\mu}, \mu_\lambda)}{\partial \mathbf{d}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\mu}, \mu_\lambda)}{\partial \mu_\lambda} = 0 \end{cases} \tag{4.63}$$

originando o seguinte sistema de equações lineares,

$$\begin{cases} r \mathbf{A} \mathbf{d}^{k,m} - \mathbf{F} \mu_\lambda^{k,m} = \tilde{\mathbf{F}} - \boldsymbol{\Lambda}^k + \mathbf{L}^{k,m-1} \\ \mathbf{F}^T \mathbf{d}^{k,m} = 1 \end{cases} \tag{4.64}$$

no qual se mantêm válidas todas as definições estabelecidas em (4.14). Recorrendo a manipulações algébricas, a variável dual μ_λ pode ser eliminada do sistema de equações (4.64), já que a determinação explícita do seu valor não é relevante para o

problema, conduzindo a:

$$\mathbf{d}^{k,m} = \frac{1}{r} \mathbf{A}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{\Lambda}^k + \mathbf{L}^{k,m-1} + \mathbf{F} \mu_\lambda^{k,m} \right) \quad (4.65)$$

Substituindo (4.65) na equação da 2ª linha do sistema de equações (4.64) o valor, μ_λ , pode ser expresso do seguinte modo,

$$\mu_\lambda^{k,m} = \frac{r - \mathbf{F}^T \mathbf{D}^{k,m}}{\beta} \quad (4.66)$$

onde,

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \quad (4.67a)$$

$$\beta = \mathbf{F}^T \mathbf{H} \quad (4.67b)$$

$$\mathbf{D}^{k,m} = \mathbf{A}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{\Lambda}^k + \mathbf{L}^{k,m-1} \right) \quad (4.67c)$$

Introduzindo por último (4.66) em (4.65), consegue-se eliminar, μ_λ , podendo as velocidades nodais ser calculadas a partir da expressão,

$$\mathbf{d}^{k,m} = \frac{1}{r} \left(\mathbf{D}^{k,m} + \frac{r - \mathbf{F}^T \mathbf{D}^{k,m}}{\beta} \mathbf{H} \right) \quad (4.68)$$

Para concluir, é interessante observar que as alterações introduzidas devido à normalização do trabalho do carregamento variável não produzem quaisquer modificações na matriz, \mathbf{A} , a única que é necessário factorizar para a obtenção da solução da minimização global.

4.4.2 Formulação forte e elementos quadráticos

Neste instante, retoma-se o problema de optimização formulado em (4.60) e o problema correspondente (4.61), gerado através da aplicação do método do Lagrangeano Aumentado.

Como se pode constatar, a restrição de compatibilidade (4.60c) é introduzida no funcional Lagrangeano (4.61) de uma forma fraca (ou ponderada). Efectivamente, a condição estabelecida é a obrigação do resíduo da diferença entre o campo de

deformações local e global em cada elemento ser mínimo. Note-se porém que esta medida não condiciona a obtenção de majorantes estritos da carga de colapso devido à relação adoptada para o grau das funções de aproximação: linear para o campo das velocidades e constante para as taxas de deformação.

Propõe-se agora que a compatibilidade passe a ser introduzida no Lagrangeano, na sua forma local e recorrendo a um conjunto de pontos pré-determinados. O número de pontos, n_P , a adoptar deve ser o estritamente necessário por forma a garantir a compatibilidade em todo o domínio, ou seja, o número de coeficientes da função polinomial utilizada para interpolar o campo das taxas de deformação. Este número encontra-se resumido na Tabela 4.1 para os casos considerados neste trabalho.

Tabela 4.1: Número de pontos para a imposição da condição de compatibilidade

Dimensão	Polinómio	n_P
2D	a_0	1
	$a_0 + a_1x + b_1y$	3
3D	a_0	1
	$a_0 + a_1x + b_1y + c_1z$	4

Seguindo esta descrição, a formulação discreta do Lagrangeano Aumentado do problema (4.60) resulta do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\text{Min } \mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\mu}, \mu_\lambda) &= \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \mathcal{D}(\mathbf{e}_i) \, d\Omega \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{N}_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma_i}} \tilde{\mathbf{t}}^T \mathbf{N}_i \, d\Gamma \right) \mathbf{d}_i \\
&\quad + \mu_\lambda - \mu_\lambda \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{b}_\lambda^T \mathbf{N}_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma_i}} \mathbf{t}_\lambda^T \mathbf{N}_i \, d\Gamma \right) \mathbf{d}_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_E} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta_i}{n_P} \boldsymbol{\mu}_{ij}^T \left((\mathbf{B}\mathbf{N}_i)_j \mathbf{d}_i - \mathbf{E}_{ij} \mathbf{e}_i \right) \\
&\quad + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{n_E} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta_i}{n_P} \left((\mathbf{B}\mathbf{N}_i)_j \mathbf{d}_i - \mathbf{E}_{ij} \mathbf{e}_i \right)^T \left((\mathbf{B}\mathbf{N}_i)_j \mathbf{d}_i - \mathbf{E}_{ij} \mathbf{e}_i \right)
\end{aligned}$$

sujeito a: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \in \mathcal{C}_c$

(4.69)

onde, em referência ao i -ésimo elemento, Δ_i denota a área{volume} do elemento 2D{3D} e a matriz, \mathbf{E}_i , agrupa as funções de aproximação nodais das taxas de deformação, sendo as respectivas variáveis armazenadas no vector, \mathbf{e}_i . Efectivamente, admite-se, a partir deste momento, que a aproximação do campo da taxa de deformação seja expressa da forma,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i(x, y, z) = \{\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, 2\dot{\epsilon}_{xy}, 2\dot{\epsilon}_{yz}, 2\dot{\epsilon}_{xz}\}_i^T = \mathbf{E}_i(x, y, z)\mathbf{e}_i \quad \text{em } \Omega_i \quad (4.70)$$

Ainda na definição (4.69), caso o índice j afecte uma grandeza que seja função de coordenadas espaciais, esta deve ser avaliada para as coordenadas do ponto j .

A inclusão do coeficiente $\frac{\Delta_i}{n_P}$ prende-se com o facto de testes numéricos revelarem, para malhas com discrepâncias significativas na dimensão entre diferentes elementos, uma convergência anormalmente lenta. Este comportamento indesejável é eliminado através da introdução destes factores de ponderação. O recurso a esta estratégia poderá ser interpretado como a utilização do método da Colocação Pontual [137]. Refere-se igualmente que a utilização destes pesos permite ainda que o sistema governativo da minimização global coincida com aquele que seria obtido com a anterior formulação fraca, no caso de elementos finitos lineares ou quadráticos, através de uma escolha apropriada dos pontos onde é imposta a compatibilidade - os pontos de integração de Gauss.

4.4.2.1 Funções de aproximação

A escolha das funções de aproximação desempenha um papel fulcral para garantir a obtenção de majorantes estritos da carga de colapso. Este último objectivo é cumprido desde que se garanta a obtenção de um campo cinemático perfeitamente compatível.

Esta é a principal razão pela qual se recorre a funções nodais (compatíveis) para interpolar o campo das velocidades. Adicionalmente e por forma a permitir a compatibilidade entre o campo das velocidades e a aproximação local do campo da taxa das deformações, é necessário que as funções utilizadas para esta última aproximação sejam pelo menos de um grau inferior ao das funções de interpolação das velocidades. Sublinha-se que a afirmação antecedente só é válida se as funções de aproximação consistirem em funções polinomiais no referencial do operador diferen-

cial de compatibilidade; por outras palavras, não poderá haver uma distorção entre o espaço das coordenadas locais do elemento e o das coordenadas globais. Deste modo, as funções nodais de forma devem conter apenas nós localizados nos vértices dos elementos, recorrendo-se, caso seja necessário, a elementos subparamétricos, *i.e.*, a elementos cujas funções de aproximação das velocidades são de grau superior às utilizadas para modelar a geometria do elemento.




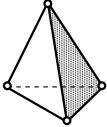
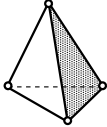
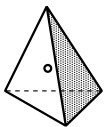



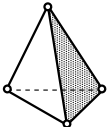
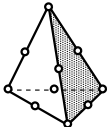
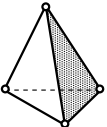
Na realidade, as restrições anteriores não introduzem nenhuma limitação significativa quanto ao grau das funções, porém, é ainda necessário garantir que o campo local da taxa das deformações cumpre a regra de normalidade em todos os pontos do domínio do elemento. Esta condição é traduzida pela única restrição explícita do problema (4.61). Devido às características do espaço, \mathcal{C}_c , torna-se demasiado complexo cumprir esta restrição para uma aproximação da taxa das deformações de um grau arbitrário. Contudo, constata-se que para uma aproximação de grau linear (ou inferior), se o valor da taxa das deformações nos vértices do elemento satisfizer a condição de normalidade, esta é automaticamente satisfeita para qualquer outro ponto no domínio de elemento. Para tal, basta relembrar que o espaço, \mathcal{C}_c , é convexo e, conseqüentemente, qualquer combinação linear de pontos pertencentes ao espaço, com pesos no intervalo $[0,1]$, está também necessariamente contida nesse mesmo espaço.

Com base nas razões apresentadas, é apresentado na Tabela 4.2 o tipo de elementos e respectivas aproximações que podem ser utilizados sem comprometer o objectivo pretendido de obtenção de majorantes estritos.

4.4.2.2 Minimização Global

Avaliando as repercussões das medidas introduzidas nesta secção no sistema governativo da minimização global, verifica-se que a definição (4.64) permanece válida, bem como todo o processo descrito para isolar o vector das variáveis primais, \mathbf{d} . Na realidade, apenas as definições da matriz \mathbf{A} e dos vectores $\mathbf{\Lambda}$ e \mathbf{L} sofrem alterações:

Tabela 4.2: Resumo das características dos elementos finitos

Elementos	Forma	Aproximação $\dot{\mathbf{u}}$	Aproximação $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$
Lineares (isoparamétricos)	 3 nós	 3 nós	 constante
	 4 nós	 4 nós	 constante
Quadráticos (subparamétricos)	 3 nós	 6 nós	 3 nós
	 4 nós	 10 nós	 4 nós

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n_E} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta_i}{n_P} (\mathbf{B}\mathbf{N}_i)_j^T (\mathbf{B}\mathbf{N}_i)_j \quad (4.71a)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^k = \sum_{i=1}^{n_E} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta_i}{n_P} (\mathbf{B}\mathbf{N}_i)_j^T (\boldsymbol{\mu}_{ij})^k \quad (4.71b)$$

$$\mathbf{L}^{k,m-1} = r \sum_{i=1}^{n_E} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta_i}{n_P} (\mathbf{B}\mathbf{N}_i)_j^T (\mathbf{e}_{ij})^{k,m-1} d\Omega \quad (4.71c)$$

onde o vector das variáveis nodais locais, \mathbf{e}_{ij} , representa o valor das componentes da taxa de deformação no nó j do i -ésimo elemento finito, sendo por definição equivalente a escrever,

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{E}_{ij} \mathbf{e}_i \quad (4.72)$$

4.4.2.3 Minimização Local

É na fase da minimização local que se encontra a justificação para as alterações descritas nesta secção quanto ao modo de introduzir a condição de compatibilidade no funcional Lagrangeano. As observações aqui efectuadas apenas contemplam os elementos quadráticos, já que no caso dos elementos lineares as duas formulações são perfeitamente coincidentes.

O problema de minimização local obtido de (4.69) pode agora ser expresso do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{L}_i^*(\mathbf{e}_i) = & \int_{\Omega_i} \mathcal{D}(\mathbf{e}_i) d\Omega - \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta_i}{n_P} \left(\boldsymbol{\mu}_{ij} + r(\mathbf{B}\mathbf{N}_i)_j \right)^T \mathbf{e}_{ij} \\ & + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta_i}{n_P} \mathbf{e}_{ij}^T \mathbf{e}_{ij} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{e}_{ij} \in \mathcal{C}_c, \quad j = 1, \dots, n_P$$

Ignorando, de momento, o termo da dissipação plástica, constata-se que as variáveis de decisão entre os diferentes nós estão perfeitamente desacopladas. Tal não se observaria caso se optasse por introduzir ponderadamente as condições de compatibilidade.

Desenvolve-se agora o termo da dissipação através de uma integração numérica de Gauss:

$$\int_{\Omega_i} \mathcal{D}(\mathbf{e}_i) d\Omega = \sum_{k=1}^{n_G} \frac{\Delta_i}{n_G} \mathcal{D}(\mathbf{E}_{ik} \mathbf{e}_i) \quad (4.74)$$

onde n_G representa o número de pontos de Gauss utilizado, que deverá coincidir com n_P . Uma vez mais, a notação \mathbf{E}_{ik} significa que a matriz deve ser avaliada para as coordenadas do k -ésimo ponto de Gauss. Esta expressão só é exacta para os materiais friccionais (Mohr-Coulomb e Drucker-Prager). No entanto, sublinha-se que, para o caso dos materiais coesivos, a expressão representa um majorante da dissipação, continuando-se assim a garantir a obtenção de um majorante estrito para a carga de colapso. Esta expressão assegura ainda o desacoplamento das variáveis nodais.

Deste modo, a minimização local resulta num conjunto de n_P processos independen-

tes associados a cada ponto de Gauss, os quais são tratado através de uma estratégia exactamente igual à delineada para os elementos lineares.

4.4.3 Descontinuidades no campo de velocidades

Conforme referido anteriormente, no quadro teórico da Teoria da Análise Limite o campo das velocidades associado a mecanismos de colapso não é necessariamente um campo contínuo. Deste modo, foram estudadas estratégias visando a introdução no modelo proposto de descontinuidades no campo das velocidades.

4.4.3.1 Elementos degenerados

Na primeira das duas estratégias consideradas neste trabalho, as descontinuidades resultam da introdução, na malha de elementos finitos, de um conjunto de elementos degenerados de espessura nula nas interfaces dos elementos contínuos, seguindo uma proposta apresentada por Krabbenhøft *et al.* [69]. Estes elementos degenerados são obtidos colapsando as coordenadas de dois nós do mesmo elemento. Ilustra-se, na Figura 4.6(a), a interface de dois elementos 2D formada por elementos degenerados. Por sua vez, a Figura 4.6(b) representa o conjunto de 3 tetraedros degenerados, constituídos respectivamente pelos nós: 1-2-3-4, 2-4-5-6 e 2-3-4-6. Estes são utilizados para introduzir descontinuidades 3D.

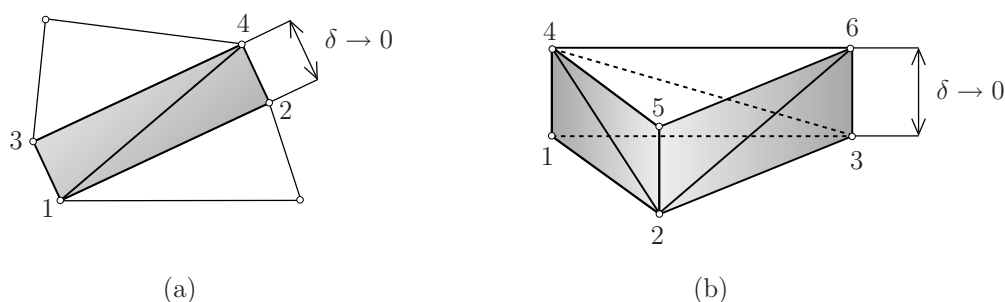


Figura 4.6: Elementos degenerados

No trabalho de Krabbenhøft *et al.* [69] é demonstrado que a utilização destes elementos degenerados como se de elementos regulares se tratassem, permite obter campos

de velocidades descontínuos e cinematicamente admissíveis. Estas descontinuidades no campo das velocidades, acaso ocorram, localizam-se naturalmente na interface dos elementos regulares.

A mesma equipa de autores, num trabalho ainda sem divulgação pública, estende a aplicação desta abordagem feita com elementos de campos de velocidade linear a elementos de campos quadráticos, propondo uma condensação dos graus de liberdade associados aos nós intermédios. Contudo, esta possibilidade não foi explorada no presente trabalho, tendo-se apenas feito a implementação para elementos lineares.

Como é previsível, a utilização de elementos degenerados introduz problemas numéricos na formulação, sendo necessário recorrer a alguns artifícios para os contornar, os quais são descritos em seguida. Como ponto de partida, definem-se as seguintes funções de aproximação artificiais:

$$\bar{\mathbf{N}}_i = \Delta_i \mathbf{N}_i \quad (4.75a)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_i = \Delta_i \mathbf{E}_i \quad (4.75b)$$

Introduzindo (4.75) nas definições (4.71) e (4.72), a contribuição destes elementos degenerados para os termos do sistema governativo da minimização global pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_d = \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{1}{n_P \Delta_i} (\mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_i)_j^T (\mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_i)_j \quad (4.76a)$$

$$\Lambda_d^k = \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{1}{n_P} (\mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_i)_j^T (\boldsymbol{\mu}_{ij})^k \quad (4.76b)$$

$$\mathbf{L}_d^{k,m-1} = \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{r}{n_P \Delta_i} (\mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_i)_j^T \bar{\mathbf{E}}_{ij} (\mathbf{e}_i)^{k,m-1} d\Omega \quad (4.76c)$$

onde n_d representa o número de elementos degenerados.

Por sua vez, o problema de minimização local para estes elementos é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{L}_i^*(\mathbf{e}_i) &= \sum_{k=1}^{n_G} \frac{\mathcal{D}(\bar{\mathbf{E}}_{ik}\mathbf{e}_i)}{n_G} - \sum_{j=1}^{n_P} \frac{1}{n_P} \left(\boldsymbol{\mu}_{ij} + \frac{r}{\Delta_i} (\mathbf{B}\bar{\mathbf{N}}_i)_j \right)^T \bar{\mathbf{E}}_{ij}\mathbf{e}_i \\ &+ \sum_{j=1}^{n_P} \frac{r}{2n_P\Delta_i} \mathbf{e}_i^T \bar{\mathbf{E}}_{ij}^T \bar{\mathbf{E}}_{ij}\mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (4.77)$$

sujeito a: $\mathbf{e}_{ij} \in \mathcal{C}_c$, $j = 1, \dots, n_P$

Da análise das definições (4.76) e (4.77), é possível constatar que o problema numérico originado pela degeneração dos elementos ainda persiste, já que o termo, $\frac{1}{\Delta_i}$, não foi completamente eliminado das expressões. Esta característica é um problema intrínseco à presente formulação, não se observando na maioria das demais formulações de limite superior, como por exemplo aquela para a qual este método de elementos degenerados foi originalmente desenvolvido.

A origem desta particularidade deve-se ao termo quadrático de penalidade introduzido pelo método do Lagrangeano Aumentado, mas pode ser facilmente contornada desde que seja adoptado o seguinte coeficiente de penalidade, \bar{r} , diferenciado para os elementos degenerados:

$$\bar{r}_i = r\Delta_i \quad (4.78)$$

Aparentemente, a inexistência do coeficiente de penalidade na definição (4.76a) inviabilizaria a eliminação pretendida da parcela $\frac{1}{\Delta_i}$. Todavia, uma análise atenta ao sistema de equações (4.64) revela que o coeficiente r está também associado à matriz, \mathbf{A} , tendo sido posto em evidência. Atendendo a este facto e para que a definição do sistema global (4.64) permaneça válida, não restam dúvidas que é necessário modificar a expressão de \mathbf{A}_d em (4.76a), multiplicando cada contribuição elementar por Δ_i . Assim, conforme pretendido, obtém-se:

$$\mathbf{A}_d = \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{1}{n_P} (\mathbf{B}\bar{\mathbf{N}}_i)_j^T (\mathbf{B}\bar{\mathbf{N}}_i)_j \quad (4.79)$$

A estratégia exposta apresenta como principal atractivo para a sua utilização a grande facilidade de implementação, não sendo necessário efectuar praticamente nenhuma alteração ao código do modelo contínuo. Contudo, verificou-se que, em

situações particulares, esta estratégia sobrestima o valor da dissipação plástica, no caso de materiais puramente coesivos. Este fenómeno, que não foi não constatado em [69], ocorre sempre que há uma mudança do sentido na descontinuidade do campo das velocidades. Em consequência, a qualidade da estimativa da carga de colapso obtida pode ser afectada. Seguidamente, é realizada a demonstração do facto mencionado para o caso 2D, podendo seguir-se um raciocínio análogo para chegar à mesma conclusão para o caso 3D.

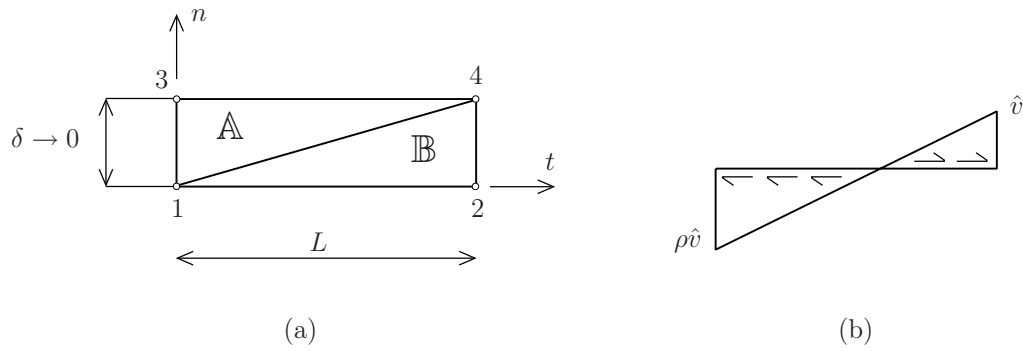


Figura 4.7: Modelação de uma descontinuidade linear com elementos degenerados

Considere-se uma interface genérica, modelada através dos dois elementos degenerados representados na Figura 4.7(a). Para os mesmos determine-se a taxa das deformações por unidade de área, através da expressão:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{N}}_i \mathbf{d}_i \quad (4.80)$$

obtendo-se,

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_t \\ \dot{\varepsilon}_n \\ \dot{\gamma}_{tn} \end{Bmatrix}_{\mathbb{A}} = \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ d_n^3 - d_n^1 \\ d_t^3 - d_t^1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_t \\ \dot{\varepsilon}_n \\ \dot{\gamma}_{tn} \end{Bmatrix}_{\mathbb{B}} = \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ d_n^4 - d_n^2 \\ d_t^4 - d_t^2 \end{Bmatrix} \quad (4.81a-b)$$

Atendendo à condição de normalidade para os materiais puramente coesivos resulta,

$$\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0 \Rightarrow d_n^1 = d_n^3 \wedge d_n^2 = d_n^4, \quad (4.82)$$

o que significa que não pode haver uma descontinuidade da velocidade na direcção normal à superfície. Esta conclusão é perfeitamente consentânea com a regra da normalidade (2.30). Por fim, com base na expressão (2.13), é calculada a dissipação

plástica total na interface em questão:

$$W_{\mathcal{D}} = c(|\dot{\tilde{\gamma}}_{tn_{\mathbb{A}}}| + |\dot{\tilde{\gamma}}_{tn_{\mathbb{B}}}|) = c\frac{L}{2}(|d_t^3 - d_t^1| + |d_t^4 - d_t^2|) \quad (4.83)$$

Considere-se, agora, a descontinuidade no campo de velocidade esquematizada na Figura 4.7(b), com $\rho \in [-1, 1]$. Através da expressão (2.31), a dissipação plástica total é dada por:

$$W_{\mathcal{D}} = \begin{cases} \frac{cL}{2}|\hat{v}|(\rho + 1), & \rho \geq 0 \\ \frac{cL}{2}|\hat{v}|\frac{\rho^2 + 1}{1 - \rho}, & \rho < 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

Utilizando a expressão (4.83) para calcular a mesma dissipação, obtém-se o seguinte valor,

$$W_{\mathcal{D}} = \frac{cL}{2}|\hat{v}|(|\rho| + 1) \quad (4.85)$$

Em conclusão, a expressão (4.83) sobrestima a dissipação plástica quando $\rho < 0$, podendo-se mesmo chegar a obter uma dissipação duas vezes superior à real (para $\rho = -1$).

4.4.3.2 Formulação Híbrida/Mista

A segunda estratégia considerada baseia-se na introduzir na formulação de uma terceira aproximação, na fronteira dos elementos. Assim, de acordo com a nomenclatura adoptada por Pian [104], a formulação resultante é designada simultaneamente de Híbrida, por aproximar campos tanto no domínio como na fronteira, e de Mista, por considerar duas aproximações independentes de campos distintos no domínio. O campo aproximado na fronteira dos elementos é o das velocidades relativas, sendo a respectiva aproximação definida do seguinte modo:

$$\hat{\mathbf{v}}_i(x, y, z) = \{\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z\}_i^T = \mathbf{U}_{\Gamma_i}(x, y, z)\mathbf{q}_{\Gamma_i} \quad \text{em } \Gamma_{di} \quad (4.86)$$

Na expressão (4.86), em referência à i -ésima fronteira inter-elementar representada por Γ_{di} , onde se consideram descontinuidades, a matriz \mathbf{U}_{Γ_i} agrupa as funções de aproximação, que podem ser constantes ou lineares. O vector \mathbf{q}_{Γ_i} contém os pesos das respectivas funções de aproximação, cujo valor representa a velocidade relativa nodal.

À semelhança da primeira estratégia, nas fronteiras inter-elementares com descontinuidades os nós não são partilhados pelos elementos, havendo uma redundância de nós com as mesmas coordenadas (Figura 4.8). Por sua vez, a compatibilização do campo das velocidades entre dois elementos estabelece-se através do campo das velocidades relativas, definido do seguinte modo:

$$\hat{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}}^{\oplus} - \dot{\mathbf{u}}^{\ominus} \quad \text{em } \Gamma_d \quad (4.87)$$

onde \oplus e \ominus representam as duas regiões delimitadas pela fronteira Γ_d , podendo a sua ordem ser escolhida de forma perfeitamente arbitrária.

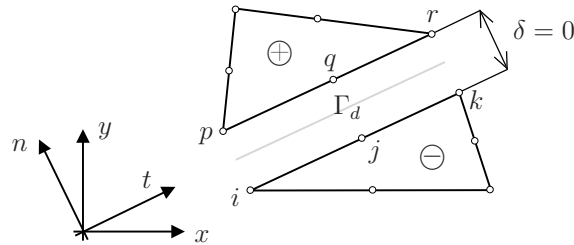


Figura 4.8: Fronteira com descontinuidade entre dois elementos adjacentes

De seguida, introduz-se na definição anterior as aproximações do campo das velocidades para o domínio dos elementos (4.6) e das velocidades relativas (4.86) para a fronteira, obtendo-se,

$$\mathbf{U}_{\Gamma_i} \mathbf{q}_{\Gamma_i} = \mathbf{N}_i^{\oplus} \mathbf{d}_i^{\oplus} - \mathbf{N}_i^{\ominus} \mathbf{d}_i^{\ominus} \quad \text{em } \Gamma_{di} \quad (4.88)$$

Seguindo a mesma metodologia estipulada para a parcela contínua das velocidades, a condição de compatibilidade (4.88) é introduzida na formulação através do método do Lagrangeano Aumentado. Por forma a simplificar a notação e tornar mais clara a exposição dos elementos de descontinuidades, doravante e até ao final da presente secção, todas as expressões apresentadas consideram a contribuição de uma única interface, deixando-se cair o índice i . Assim, a contribuição da descontinuidade para

o funcional Lagrangeano é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d(\mathbf{d}, \mathbf{q}_\Gamma, \boldsymbol{\mu}_\Gamma) &= \int_{\Gamma_d} \mathcal{D}(\mathbf{q}_\Gamma) \, d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta}{n_P} \boldsymbol{\mu}_{\Gamma j}^T (\mathbf{d}_j^\oplus - \mathbf{d}_j^\ominus - \mathbf{U}_{\Gamma j} \mathbf{q}_\Gamma) \\ &+ \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta}{n_P} (\mathbf{d}_j^\oplus - \mathbf{d}_j^\ominus - \mathbf{U}_{\Gamma j} \mathbf{q}_\Gamma)^T (\mathbf{d}_j^\oplus - \mathbf{d}_j^\ominus - \mathbf{U}_{\Gamma j} \mathbf{q}_\Gamma) \end{aligned} \quad (4.89)$$

onde n_P é o número de nós em cada da fronteira e Δ denota o comprimento{área} da fronteira 2D{3D}. Os vectores \mathbf{d}_j^\oplus e \mathbf{d}_j^\ominus representam as velocidades nodais do nó j dos elementos de cada um dos lados da fronteira, e $\boldsymbol{\mu}_{\Gamma j}$ os multiplicadores de Lagrange associados à condição de compatibilidade das descontinuidades. Seguindo a notação anteriormente estipulada, $\mathbf{U}_{\Gamma j}$, denota a matriz das funções de aproximação das velocidades relativas, avaliadas para as coordenadas do ponto j .

Impondo agora a condição de estacionaridade do funcional (4.89) em relação às variáveis primais, \mathbf{d} , obtém-se para cada ponto da interface,

$$r \mathbf{A}_d \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_j^\ominus \\ \mathbf{d}_j^\oplus \end{Bmatrix} = -\boldsymbol{\Lambda}_{dj} + \mathbf{L}_{dj} \quad (4.90)$$

onde,

$$\mathbf{A}_d = \frac{\Delta}{n_P} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.91a)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{dj} = \frac{\Delta}{n_P} \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\mu}_{\Gamma j} \\ \boldsymbol{\mu}_{\Gamma j} \end{Bmatrix} \quad (4.91b)$$

$$\mathbf{L}_{dj} = r \frac{\Delta}{n_P} \begin{Bmatrix} -\mathbf{U}_{\Gamma j} \mathbf{q}_\Gamma \\ \mathbf{U}_{\Gamma j} \mathbf{q}_\Gamma \end{Bmatrix} \quad (4.91c)$$

e em que a matriz identidade, \mathbf{I} , tem a dimensão 2×2 { 3×3 } para problemas 2D{3D}.

O resultado anterior permite concluir qual a contribuição da parcela das descontinuidades para o sistema governativo da minimização global (4.64). Com efeito, basta somar a contribuição das matrizes e vectores elementares nodais das descontinuidades (4.91) aos termos correspondente do sistema (4.64). Este procedimento não é mais do que a usual operação de *espalhamento* executada no MEF.

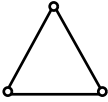
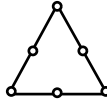
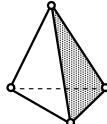
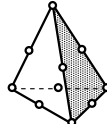

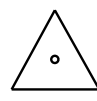

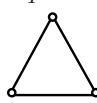
A minimização em relação às variáveis nodais das velocidades relativas, \mathbf{q}_Γ , é englobada na fase de minimização local, sendo este procedimento em tudo análogo ao descrito para as variáveis da taxa das deformações locais, \mathbf{e} . Com base no Lagrangeano (4.89), o problema de minimização local associado a uma interface com descontinuidade pode ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{L}_d^*(\mathbf{q}_\Gamma) &= \int_{\Gamma_d} \mathcal{D}(\mathbf{q}_\Gamma) \, d\Gamma - \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta}{n_P} \left(\boldsymbol{\mu}_{\Gamma_j} + r(\mathbf{d}_j^\oplus - \mathbf{d}_j^\ominus) \right)^T \mathbf{U}_{\Gamma_j} \mathbf{q}_\Gamma \\ &+ \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta}{n_P} \mathbf{q}_\Gamma^T \mathbf{U}_{\Gamma_j}^T \mathbf{U}_{\Gamma_j} \mathbf{q}_\Gamma \end{aligned} \quad (4.92)$$

sujeito a: $\mathbf{q}_{\Gamma_j} \in \mathcal{C}_d$, $j = 1, \dots, n_I$

Nesta expressão, n_I representa o número de nós associados às funções de aproximação do campo das velocidades relativas, devendo ser inferior a n_P para garantir a obtenção de um campo cinemático compatível. Na Tabela 4.3 encontram-se resumi-das todas as relação de n_P/n_I consideradas.

Tabela 4.3: Pontos para a imposição da condição de compatibilidade na fronteira

Aproximação $\hat{\mathbf{u}}$				
	$n_P = 2$	$n_P = 3$	$n_P = 3$	$n_P = 6$
Aproximação $\hat{\mathbf{v}}$				
	$n_I = 1$	$n_I = 1$		
				
	$n_I = 2$	$n_I = 3$		

Introduz-se agora a definição da matriz de transformação, \mathbf{T} . Esta matriz permite efectuar a rotação do sistema de coordenadas global para um sistema dito local, cujos versores das coordenadas estão orientados na direcção normal e tangencial à superfície inter-elementar. Convencionou-se que o versor da direcção normal é exterior

ao elemento \ominus , conforme ilustrado na Figura 4.8. Esta transformação permite que o problema (4.92) seja, por conveniência, reescrito na forma:

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{L}_d^*(\tilde{\mathbf{q}}_\Gamma) &= \int_{\Gamma_d} \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{q}}_\Gamma) \, d\Gamma - \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta}{n_P} \tilde{\mathbf{s}}_j^T \mathbf{U}_{\Gamma_j} \tilde{\mathbf{q}}_\Gamma + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta}{n_P} \tilde{\mathbf{q}}_\Gamma^T \mathbf{U}_{\Gamma_j}^T \mathbf{U}_{\Gamma_j} \tilde{\mathbf{q}}_\Gamma \\ \text{sujeito a: } \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_j} &\in \mathcal{C}_d, \quad j = 1, \dots, n_I \end{aligned} \quad (4.93)$$

em que,

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_j} = \mathbf{T} \mathbf{q}_\Gamma, \quad \tilde{\mathbf{s}}_j = \mathbf{T} \left(\boldsymbol{\mu}_{\Gamma_j} + r(\mathbf{d}_j^\oplus - \mathbf{d}_j^\ominus) \right) \quad (4.94)$$

As estratégias numéricas para a minimização deste problema local são apresentadas em detalhe no Capítulo 5. Interessa, contudo, referir que, para casos onde $n_I < n_P \wedge n_I \neq 1$, não é possível desacoplar as variáveis associadas aos diferentes nós. Este facto dá origem a um aumento da complexidade da minimização a resolver.

4.4.4 Modificações do algoritmo de Uzawa

O algoritmo iterativo de Uzawa apresenta importantes atractivos para a sua utilização. Efectivamente, este algoritmo revela um comportamento muito robusto, revelando ser capaz de convergir em todos os problemas resultantes da presente formulação. Adicionalmente, é um método que, do ponto de vista da sua implementação numérica, não requiere grandes recursos computacionais, nomeadamente de memória. Outra característica bastante importante, explorada no decorrer deste trabalho, é a adequabilidade que o algoritmo revela para a sua implementação em processamento paralelo.

No entanto, a sua velocidade de convergência pode apresentar por vezes um comportamento algo lento. Este é um assunto que continua a atrair a atenção dos matemáticos, encontrando-se recentemente na literatura propostas que pretendem colmatar esta deficiência com excelentes resultados [19],[76]. Infelizmente, devido às especificidades decorrentes da actual formulação, nomeadamente da introdução do ciclo de relaxação na algoritmo de Uzawa, todas as tentativas de transpor as

referidas propostas para o presente caso revelaram-se infrutíferas.

Contudo, foi possível introduzir outras modificações alternativas na variante inicial do algoritmo de Uzawa (Figura 4.3) de modo a melhorar o desempenho da sua convergência.

Observa-se que o parâmetro de penalidade, r , assume um papel fundamental no desempenho do algoritmo de Uzawa [13]. O seu valor inicial não deve ser demasiado elevado ou crescer demasiadamente rápido. A acontecer, isto poderá resultar num *mau condicionamento* do problema, correndo-se o risco de obter um majorante da carga de colapso maior do que aquele que o método é capaz de produzir para a malha utilizada. Por outro lado, a escolha de um valor inicial inadequadamente baixo ou o facto do seu crescimento durante o processo iterativo ser muito lento pode fazer aumentar significativamente o número de iterações necessárias para atingir a convergência. Estes factos são igualmente relatados e discutidos em [13].

Deste modo, foi introduzido no algoritmo um procedimento de actualização do parâmetro de penalização. Para maior eficácia esta actualização é combinada com uma estratégia de escolha do valor inicial para o referido parâmetro. O valor inicial óptimo do parâmetro de penalidade é dependente do problema. A prática revela que a aplicação da seguinte expressão para determinar o valor inicial do parâmetro, r , produz bons resultados,

$$r = \max \left\{ \mathbf{F}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}, \mathbf{F}^T \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{F}} \right\} \quad (4.95)$$

Para actualizar o parâmetro de penalidade no decorrer do processo iterativo sugere-se o seguinte procedimento:

- i. determina-se a média, $\bar{\mu}_\lambda$, e o desvio padrão, σ_{μ_λ} , do multiplicador de Lagrange μ_λ , durante as últimas n iterações do algoritmo de Uzawa (usualmente $n=10$),

$$\bar{\mu}_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_\lambda^{k-i} \quad (4.96a)$$

$$\sigma_{\mu_\lambda} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\mu_\lambda^{k-i} - \bar{\mu}_\lambda)^2} \quad (4.96b)$$

- ii. caso se observe uma estabilização dos valores dos coeficientes acima mencionados, avaliada através do quociente, $\frac{\sigma_{\mu_\lambda}}{\bar{\mu}_\lambda}$, processa-se um incremento do parâmetro de penalidade,

$$\frac{\sigma_{\mu_\lambda}}{\bar{\mu}_\lambda} < \delta \Rightarrow r_{n+1} = \eta r_n \quad (4.97)$$

adoptando-se por defeito os valores 10^{-4} e 2 para os coeficientes δ e η , respectivamente.

Das experiências numéricas verifica-se igualmente que utilização do ciclo de relaxação, $m > 1$, não contribui, na maioria dos casos, para a melhoria significativa do desempenho do algoritmo. Assim, optou-se por eliminar o processo de relaxação cíclico, passando a efectuar-se para cada iteração do algoritmo de Uzawa apenas uma relaxação, $m = 1$. Esta opção vem ao encontro de uma proposta de variante do algoritmo de Uzawa encontrada em [47].

Na Figura 4.9 representa-se a configuração final da variante do algoritmo de Uzawa que foi adoptada, a qual reflecte as modificações introduzidas nesta secção.

Para finalizar, fazem-se algumas considerações sobre a escolha do critério de paragem do algoritmo. Com efeito, o critério que, *a priori*, melhor aferiria a obtenção da solução óptima, deveria ser baseado numa medida da diferença entre a aproximação global e a aproximação local da taxa das deformações, *e.g.*,

$$\epsilon_{rr} = (\mathbf{B} \mathbf{N} \mathbf{d} - \mathbf{e})^T (\mathbf{B} \mathbf{N} \mathbf{d} - \mathbf{e}) \quad (4.98)$$

Contudo, constata-se que é difícil estabelecer um valor numérico para a tolerância, *TOL*, visto que é usual que os mecanismos de colapso apresentem grandes discrepâncias nos valores das deformações entre elementos. Para contornar este problema optou-se por um critério, análogo ao adoptado para a actualização do parâmetro de penalidade, baseado no desvio padrão da estimativa da carga de colapso das últimas n iterações,

$$\epsilon_{rr} = \sqrt{\frac{1}{n \bar{\lambda}^2} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{\mathcal{D}}^{k-i} - \widetilde{W}^{k-i} - \bar{\lambda})^2} \quad (4.99)$$

onde,

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{\mathcal{D}}^{k-i} - \widetilde{W}^{k-i}) \quad (4.100)$$

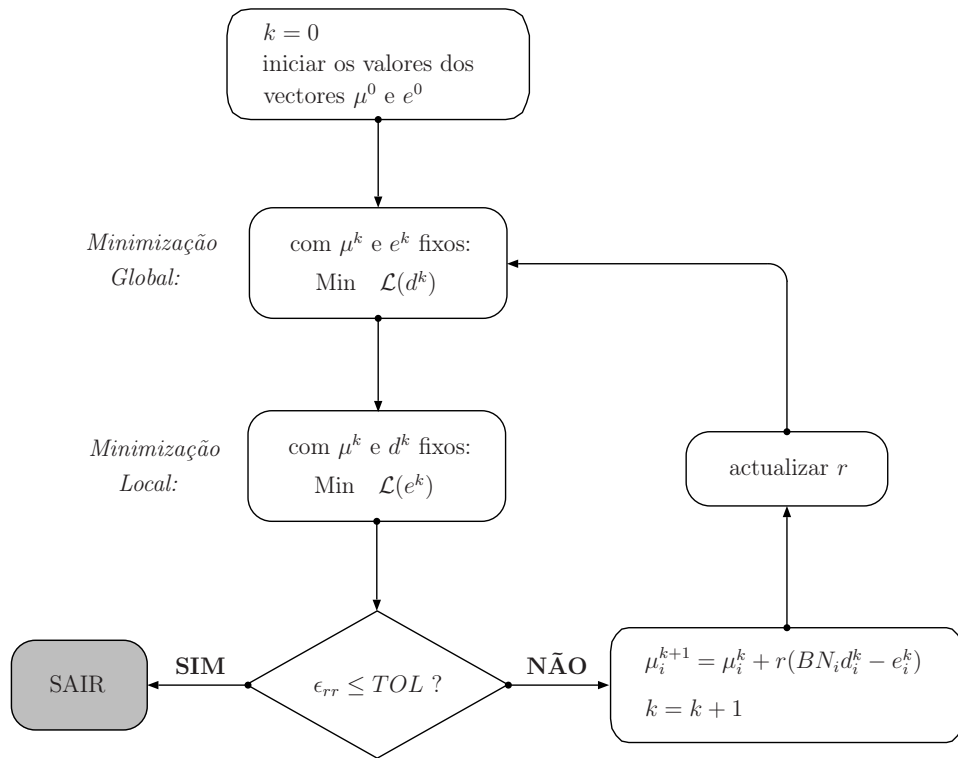


Figura 4.9: Variante final do algoritmo de Uzawa

Capítulo 5

Implementação numérica

5.1 Introdução

O presente capítulo centra-se nalguns aspectos da implementação numérica do modelo proposto. É dado particular enfoque às estratégias de minimização global e local do algoritmo de Uzawa, cujo peso computacional condiciona decisivamente o desempenho, no que respeita ao tempo de cálculo.

São, ainda, abordados alguns tópicos adicionais que conferem à implementação numérica alguns recursos suplementares. O primeiro destes tópicos é a introdução dos denominados *Corpos Rígidos*. Estes definem sub-regiões consideradas, para efeitos de cálculo, como tendo resistência infinita, nunca plastificando e mantendo, por isso, a sua geometria inalterável. A consideração explícita de elementos com estas características permite reduzir o número de graus de liberdade a eles associados e dispensando-os da fase de minimização local.

É ainda discutido o pós-processamento da solução obtida para malhas de elementos quadráticos. Em determinadas situações opta-se, durante os cálculos, pela sobreavaliação das contribuições elementares da dissipação plástica, reduzindo assim os custos computacionais na fase da minimização local. Desta forma, uma vez atingida a solução e com base no campo cinemático obtido, é possível, reavaliar o valor da dissipação plástica que permite a redução do valor da estimativa da carga de colapso.

5.2 Minimização global

A fase de minimização global passa pela resolução de um sistema de equações lineares. É conveniente resumir aqui as principais características da matriz do sistema governativo que determinaram a escolha do algoritmo proposto por Pissanetzky [105] para a resolução do referido sistema.

Desde já se salienta que o principal factor que levou à escolha de um método de resolução directo foi o facto da matriz permanecer inalterada durante o decorrer do processo iterativo. A possibilidade de factorizar a matriz uma única vez, reutilizando essa factorização cada vez que é necessário uma nova solução para um diferente termo independente, torna os métodos de resolução directa mais adequados para o presente problema, em detrimento dos métodos indirectos.

Analisando agora a estrutura da matriz, constata-se que esta tem todas as características habituais das matrizes oriundas do MEF. É simétrica, esparsa e as entradas não nulas da matriz correspondem a graus de liberdade de nós ligados por um ou mais elementos comuns.

Refira-se ainda que o grau de precisão pretendido para as análises efectuadas neste trabalho implica a utilização de sistemas com um número elevado de graus de liberdade. Torna-se, por isso, importante a utilização de uma técnica de armazenamento da matriz que requeira um espaço de memória reduzido, não desperdiçando recursos com informação redundante ou inútil. Para tal, deverá ser aproveitada a estrutura simétrica da matriz e, tanto quanto possível, não se proceder ao armazenamento de valores nulos. O elevado número de variáveis do problema, tanto globais como locais, ao qual se soma o armazenamento dos valores dos multiplicadores de Lagrange, fazem da gestão parcimoniosa da memória uma peça fundamental para o bom desempenho da implementação do modelo.

É esta gestão, porventura, o ponto forte do algoritmo de Pissanetzky. Efectivamente, este foi optimizado para resolver sistemas simétricos, recorrendo a uma decomposição de *Cholesky*. Os sistemas são armazenados numa forma compacta denominada *Sparse Row-Wise Format* [105]. Este formato permite armazenar apenas valores não nulos e é composto por 4 vectores: dois vectores de números reais que armazenam, respectivamente, as entradas da diagonal e fora da diagonal; dois vectores de números inteiros que guardam dados adicionais respeitantes ao vector dos termos

fora da diagonal, nomeadamente, o índice das colunas e a localização do primeiro termo de cada linha.

Visto que este algoritmo não incorpora nenhum procedimento de permutação de linhas/colunas, torna-se essencial a utilização prévia de um algoritmo de reordenação dos graus de liberdade. Para este efeito, adoptou-se o algoritmo desenvolvido por Sloan [115].

5.3 Estratégias de minimização local

Por forma a garantir uma boa eficiência numérica do modelo proposto torna-se essencial preconizar uma estratégia de minimização que obtenha, para cada iteração, a solução óptima o mais rapidamente possível. Deste modo procura-se, sempre que possível, evitar a utilização de algoritmos iterativos, recorrendo alternativamente a expressões analíticas deduzidas para este efeito.

Acrescente-se que os diferentes critérios de cedência apresentam entre eles especificidades distintas. Assim, a melhor política não passa por recorrer a um algoritmo que revele um bom desempenho para a generalidade dos materiais, mas antes procurar estratégias diferenciadas para os diferentes tipos de materiais, de modo a tirar o máximo partido das suas características individuais.

Segue-se a apresentação das estratégias de minimização local para os diferentes critérios de cedência estudados neste trabalho. São apresentadas, em primeiro lugar, as estratégias de minimização referentes à parcela contínua do modelo, seguindo-se a explanação das estratégias adoptadas para a parcela das descontinuidades.

Recorda-se que, na grande maioria dos casos, os problemas de minimização local (4.73) e (4.92) têm as variáveis associadas aos diferentes nós desacopladas; assim a apresentação resume-se à minimização das variáveis de um único ponto. Sempre que esta situação não se verifique, este facto é explicitamente referido no texto e são discutidas as medidas a adoptar.

5.3.1 Minimização local para o critério de Tresca

5.3.1.1 Problemas sólidos 3D

Tendo por base a análise da expressão de dissipação (2.13), é possível constatar que a utilização de uma aproximação linear para o campo da taxa de deformação não permite o cálculo exacto da dissipação plástica através de integração numérica de Gauss. Este facto deve-se à impossibilidade de exprimir a função de densidade de dissipação no domínio do elemento através de funções polinomiais, para esta situação particular. Contudo, é possível majorar a dissipação num elemento através da seguinte expressão:

$$\frac{\Delta}{n_P} \sum_{j=1}^{n_P} \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{e}}_j) \geq \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}) \, d\Omega \quad (5.1)$$

Propõe-se a utilização do majorante da dissipação indicado na expressão anterior para proceder à minimização local, salientando que, no caso de elementos com uma taxa de deformação constante, esta é exacta. Introduzindo no majorante (5.1) a definição (2.13) obtém-se,

$$\frac{\Delta}{n_P} \sum_{j=1}^{n_P} c(|e_{Ij}| + |e_{IIj}| + |e_{IIIj}|) \geq \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{e}) \, d\Omega \quad (5.2)$$

Atendendo à regra da normalidade em (2.14), uma das componentes principais da taxa de deformação pode ser expressa em relação às restantes,

$$e_{III} = -e_I - e_{II} \quad (5.3)$$

Combinando esta última propriedade com o majorante da dissipação (5.2) e com a definição do problema de minimização local (4.73) resulta a seguinte função objectivo nodal:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(e_I, e_{II}) = & c(|e_I| + |e_{II}| + |e_I + e_{II}|) + \\ & (s_{III} - s_I)e_I + (s_{III} - s_{II})e_{II} + r(e_I^2 + e_{II}^2 + e_I e_{II}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

As componentes da taxa de deformação que minimizam esta função coincidem necessariamente com os valores da solução óptima de (4.73). Tomando em consideração a

ordenação (4.21) adoptada para as componentes da taxa de deformação, conclui-se que a solução de (5.4) deverá observar uma das seguintes condições: $e_I = 0 \wedge e_{II} = 0$; $e_I > 0 \wedge e_{II} = 0$; $e_I > 0 \wedge e_{II} > 0$ ou $e_I > 0 \wedge e_{II} < 0$. Decorrente desta observação é possível eliminar os módulos na expressão (5.4) para cada uma das regiões definidas anteriormente, obtendo-se funções quadráticas em \mathbb{R}^2 . Os pontos que minimizam estas funções são possíveis candidatos para a solução de (5.4):

$$\tilde{e}^1 = \{0, 0, e_{III}\}^T \quad (5.5a)$$

$$\tilde{e}^2 = \left\{ -\frac{2c - s_I + s_{III}}{2r}, 0, e_{III} \right\}^T \quad (5.5b)$$

$$\tilde{e}^3 = \left\{ -\frac{2c - 2s_I + s_{II} + s_{III}}{3r}, -\frac{2c - 2s_{II} + s_I + s_{III}}{3r}, e_{III} \right\}^T \quad (5.5c)$$

$$\tilde{e}^4 = \left\{ -\frac{4c - 2s_I + s_{II} + s_{III}}{3r}, -\frac{-2c - 2s_{II} + s_I + s_{III}}{3r}, e_{III} \right\}^T \quad (5.5d)$$

sendo que o valor de e_{III} é obtido através da relação (5.3).

Assim, o algoritmo mais básico e contudo eficiente para a determinação da solução óptima consiste em testar todos os candidatos, introduzindo-os em (5.4), escolhendo, posteriormente, aquele com o qual se obtém o menor valor para a função objectivo.

5.3.1.2 Problemas de estados planos de deformação

Esta situação pode ser tratada como um caso particular do problema 3D, introduzindo a restrição,

$$e_{II} = 0 \quad (5.6)$$

Devido a esta imposição, o conjunto das soluções possíveis (5.5a) é reduzido a apenas duas:

$$\tilde{e}^1 = \{0, 0, 0\}^T \quad (5.7a)$$

$$\tilde{e}^2 = \left\{ -\frac{2c - s_I + s_{III}}{2r}, 0, \frac{2c - s_I + s_{III}}{2r} \right\}^T \quad (5.7b)$$

À semelhança do procedimento adoptado para o caso 3D, testam-se ambas, escolhendo-se a melhor.

5.3.1.3 Introdução de uma truncatura em tracção

Devido à introdução da truncatura em tracção no critério de Tresca, a função objectivo nodal é reescrita do seguinte modo:

$$\mathcal{L}^*(e_I, e_{II}, e_{III}) = \sum_{k=I,II,III} \left(c|e_k| - (s_k + c - \sigma_T)e_k + \frac{r}{2}e_k^2 \right) \quad (5.8)$$

sendo a regra da normalidade (2.17) traduzida pela restrição,

$$e_I + e_{II} + e_{III} \geq 0 \quad (5.9)$$

Introduza-se um novo vector, $\tilde{\mathbf{s}}_{eq}$, tal que,

$$\tilde{\mathbf{s}}_{eq} = \begin{Bmatrix} s'_I \\ s'_{II} \\ s'_{III} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_I + c - \sigma_T \\ s_{II} + c - \sigma_T \\ s_{III} + c - \sigma_T \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Facilmente se conclui que, da aplicação da estratégia descrita para o critério de Tresca sem a truncatura, substituindo as componentes do vector $\tilde{\mathbf{s}}$ pelas suas correspondentes $\tilde{\mathbf{s}}_{eq}$, resulta a melhor solução para presente o problema sobre a superfície que delimita o espaço das soluções admissíveis,

$$e_I + e_{II} + e_{III} = 0 \quad (5.11)$$

Assim, resta verificar se existe algum ponto no interior do espaço, correspondente à desigualdade de (5.9), que suplante a solução anterior.

Contraopondo a ordenação (4.21) com a condição (5.9), restringem-se as situações a considerar: (i) $e_I, e_{II}, e_{III} \geq 0$; (ii) $e_I, e_{II} \geq 0 \wedge e_{III} \leq 0$; (iii) $e_I \geq 0 \wedge e_{II}, e_{III} \leq 0$. Associados a cada uma das 3 situações anteriores são encontrados possíveis candidatos para a solução:

$$\tilde{\mathbf{e}}^1 = \frac{1}{r} \{s_I - \sigma_T, s_{II} - \sigma_T, s_{III} - \sigma_T\}^T \quad (5.12a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^2 = \frac{1}{r} \{s_I - \sigma_T, s_{II} - \sigma_T, s_{III} - \sigma_T + 2c\}^T \quad (5.12b)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^3 = \frac{1}{r} \{s_I - \sigma_T, s_{II} - \sigma_T + 2c, s_{III} - \sigma_T + 2c\}^T \quad (5.12c)$$

Destes candidatos deverão ser rejeitados liminarmente aqueles que não satisfaçam a condição (5.9). Os restantes são testados, escolhendo-se, eventualmente, aquele que produza o menor valor para a função objectivo.

5.3.2 Minimização local para o critério de von Mises

5.3.2.1 Problemas sólidos 3D

Todas as considerações efectuadas para o critério anterior conducentes à obtenção da função objectivo (5.4) são igualmente válidas para o critério de von Mises, havendo apenas a necessidade de substituir, no primeiro termo de (5.4), a definição da dissipação plástica de Tresca pela correspondente de von Mises (2.16). Esta alteração permite obter a seguinte função objectivo nodal:

$$\mathcal{L}^*(e_I, e_{II}) = h_1 + h_2 \quad (5.13)$$

em que,

$$h_1(e_I, e_{II}) = 2k\sqrt{e_I^2 + e_{II}^2 + e_I e_{II}} \quad (5.14a)$$

$$h_2(e_I, e_{II}) = r(e_I^2 + e_{II}^2 + e_I e_{II}) + (s_{III} - s_I)e_I + (s_{III} - s_{II})e_{II} \quad (5.14b)$$

Em [129] é sugerida a utilização de um método iterativo baseado no algoritmo de Fletcher-Reeves [100] para determinar o mínimo de (5.13). No presente trabalho, propõe-se, em alternativa, a utilização de uma solução analítica descoberta posteriormente. A obtenção desta solução é agora descrita com algum detalhe.

Analisando separadamente as funções h_1 e h_2 conclui-se que os respectivos mínimos ocorrem no ponto da origem ($e_I = e_{II} = 0$) e em,

$$\nabla h_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} e_I = \frac{2s_I - s_{II} - s_{III}}{3r} \\ e_{II} = \frac{2s_{II} - s_I - s_{III}}{3r} \end{cases} \quad (5.15)$$

Prossegue-se estabelecendo a mudança de coordenadas definidas por,

$$e_I = \frac{\sqrt{3}x_1}{3} + x_2 \quad (5.16a)$$

$$e_{II} = \frac{\sqrt{3}x_1}{3} - x_2 \quad (5.16b)$$

Neste novo referencial (x_1, x_2) as funções h (5.14) são escritas na forma:

$$h_1(x_1, x_2) = 2k\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (5.17a)$$

$$h_2(x_1, x_2) = r(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\sqrt{3}}{3}(s_{III} - s_I - s_{II})x_1 + (s_{II} - s_I)x_2 \quad (5.17b)$$

As isolinhas destas funções, conforme ilustrado na Figura 5.1, são curvas circunferenciais centradas nos seus pontos mínimos. Este facto permite concluir que o mínimo do funcional (5.13) está localizado no segmento de recta que une os pontos mínimos (representado a traço ponto). A título de curiosidade refere-se que a zona do gráfico a sombreado representa a região onde tem forçosamente de estar localizado o mínimo da função h_2 , sendo que esta ilação provém da combinação das condições (2.20) e (4.21) com (5.16).

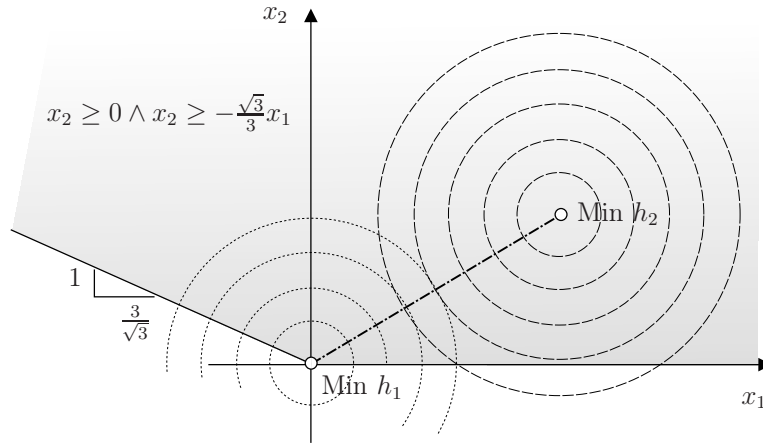


Figura 5.1: Isolinhas no referencial (x_1, x_2)

Retomando o referencial original, a equação da recta que contém o segmento referido pode ser escrita na forma:

$$e_{II} = \frac{2s_{II} - s_I - s_{III}}{2s_I - s_{II} - s_{III}}e_I \quad (5.18)$$

Note-se que a mudança de coordenadas entre os dois sistemas de coordenadas (5.16) é uma transformação linear, e, por conseguinte, qualquer segmento de recta no referencial (x_1, x_2) permanece igualmente recto no referencial original.

Substituindo (5.18) em (5.13) e impondo a condição de estacionaridade,

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*(e_I)}{\partial e_I} = 0 \quad (5.19)$$

chega-se à solução do problema,

$$e_I = \frac{2s_I - s_{II} - s_{III} - kq}{3r} \quad (5.20)$$

em que,

$$q = \sqrt{3 \frac{(s_{III} + s_{II} - 2s_I)^2}{s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 - s_I s_{II} - s_I s_{III} - s_{II} s_{III}}} \quad (5.21)$$

Finalmente, os valores de e_{II} e e_{III} são obtidos através das fórmulas (5.18) e (5.3).

Note-se, todavia, que a expressão (5.20) só é válida se o ponto obtido estiver localizado no segmento de recta que une os pontos mínimos. A maneira mais expedita de proceder a esta verificação é introduzindo a solução em (5.13), devendo-se obter um valor negativo para a função objectivo nodal. Caso contrário, o problema tem uma solução nula,

$$e_I = e_{II} = e_{III} = 0 \quad (5.22)$$

5.3.2.2 Problemas de estados planos de deformação

Para problemas de estados planos de deformação, a superfície de cedência do presente critério é análoga à do critério de Tresca. Assim, o procedimento preconizado para este último pode ser utilizado, tomando para o valor da coesão $c = \frac{\sqrt{3}}{2}k$.

5.3.2.3 Problemas de estados planos de tensão

Este critério foi ainda implementado para problemas de estados planos de tensão. Ao adequar a função objectivo nodal 3D (5.13) para o caso particular de um estado plano de tensão, admitindo que a análise se processa no plano das coordenadas (I, II) , constata-se que a expressão da parcela associada à contribuição da dissipa-

ção plástica, h_1 , se mantém inalterada ocorrendo apenas modificações na parcela remanescente,

$$h_2(e_I, e_{II}) = \frac{r}{2} (e_I^2 + e_{II}^2) - s_I e_I - s_{II} e_{II} \quad (5.23)$$

Observe-se que, neste caso, ao proceder à mudança de coordenadas (5.16),

$$h_2(x_1, x_2) = r \left(\frac{x_1^2}{3} + x_2^2 \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} (s_I + s_{II}) x_1 - (s_I - s_{II}) x_2 \quad (5.24)$$

as isolinhas de h_2 (representadas na Figura 5.1) não apresentam uma configuração circular mas sim elíptica, já que os termos quadráticos em (5.24) são afectados por coeficientes distintos. Este facto inviabiliza a utilização da estratégia de minimização delineada para o caso 3D. Assim, não tendo sido encontrada uma estratégia alternativa que fornecesse a solução do presente problema de minimização através de uma forma analítica, opta-se por utilizar a estratégia de resolução iterativa descrita em [129].

Considera-se relevante registar que para os problemas de estados planos de tensão, a condição de normalidade do escoamento plástico não impõe, para efeitos práticos, nenhuma restrição. Efectivamente, a deformação ocorrida na direcção III não tem influência, de um ponto de vista cinemático, para a análise do problema. Corolário importante deste facto é a ausência dos problemas numéricos de *locking* mencionados na secção 4.2.3.2. Note-se, para finalizar, que a componente e_{III} da taxa de deformação não é nula. Com efeito, ela é obtida através de (5.3), tal como para o caso 3D.

5.3.3 Minimização local para o critério de Mohr-Coulomb

Escreva-se a função objectivo nodal do problema de minimização local para o critério de Mohr-Coulomb, uma função quadrática em \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*(e_I, e_{II}, e_{III}) = & \frac{c}{\tan \phi} (e_I + e_{II} + e_{III}) \\ & - s_I e_I - s_{II} e_{II} - s_{III} e_{III} + \frac{r}{2} (e_I^2 + e_{II}^2 + e_{III}^2) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Contrariamente aos critérios anteriormente estudados, esta expressão corresponde a uma avaliação exacta da dissipação plástica.

Impondo a condição,

$$\nabla \mathcal{L}^*(e_I, e_{II}, e_{III}) = 0 \quad (5.26)$$

obtém-se o ponto \mathbf{o} para o qual a função objectivo atinge o seu valor mínimo.

$$\mathbf{o} = \begin{Bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{Bmatrix} s_I - \frac{c}{\tan(\phi)} \\ s_{II} - \frac{c}{\tan(\phi)} \\ s_{III} - \frac{c}{\tan(\phi)} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

Caso o ponto anterior satisfaça a condição da normalidade (2.23), então este é o ponto óptimo do problema de minimização local. Contrariamente, a solução óptima é obtida através da projecção deste ponto sobre a superfície que delimita o espaço das soluções admissíveis, definida por:

$$e_I + e_{II} + e_{III} = (|e_I| + |e_{II}| + |e_{III}|) \sin \phi \quad (5.28)$$

Efectivamente, constate-se que na função objectivo (5.25) todos coeficientes que afectam os termos quadráticos são iguais ($r/2$). Deste modo, as isosuperfícies desta função formam superfícies esféricas centradas no ponto \mathbf{o} . Dado que o espaço das soluções admissíveis é convexo, o ponto da solução óptima é necessariamente o ponto localizado na superfície (5.28) mais próximo de \mathbf{o} , podendo ser obtido através da referida projecção.

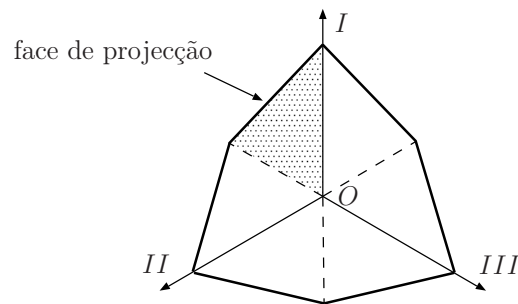


Figura 5.2: Face de projecção para o critério de Mohr-Coulomb

A superfície (5.28) define uma pirâmide hexagonal de faces perpendiculares à super-

fície de cedência; esta encontra-se representada esquematicamente na Figura 2.4(c). Devido à ordenação (4.21) adoptada para as componentes da taxa de deformação a projecção sobre a superfície de cedência deverá ocorrer sempre na face (ou respectivas arestas) indicada na Figura 5.2. Esta projecção poderá ainda coincidir no vértice da pirâmide, localizado na origem do referencial. São 4 os pontos possíveis que estão associados às situações enunciadas, sendo as suas expressões dadas por:

$$\tilde{\mathbf{e}}^1 = \{0, 0, 0\}^T \quad (5.29a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^2 = \left\{ \begin{array}{c} -(1 + \sin(\phi)) \frac{(2H - s_{III} - s_I) \sin(\phi) - s_I + s_{III}}{2r(\sin(\phi)^2 + 1)} \\ 0 \\ -\frac{(2H - s_{III} - s_I) \sin(\phi)^2 + 2(s_{III} - H) \sin(\phi) + s_I - s_{III}}{2r(\sin(\phi)^2 + 1)} \end{array} \right\} \quad (5.29b)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^3 = \left\{ \begin{array}{c} o_1 - (1 - \sin(\phi)) \frac{(1 - \sin(\phi))o_1 + (1 - \sin(\phi))o_2 + (1 + \sin(\phi))o_3}{2(1 - \sin(\phi))^2 + (1 + \sin(\phi))^2} \\ o_2 - (1 - \sin(\phi)) \frac{(1 - \sin(\phi))o_1 + (1 - \sin(\phi))o_2 + (1 + \sin(\phi))o_3}{2(1 - \sin(\phi))^2 + (1 + \sin(\phi))^2} \\ o_3 - (1 + \sin(\phi)) \frac{(1 - \sin(\phi))o_1 + (1 - \sin(\phi))o_2 + (1 + \sin(\phi))o_3}{2(1 - \sin(\phi))^2 + (1 + \sin(\phi))^2} \end{array} \right\} \quad (5.29c)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^4 = \left\{ \begin{array}{c} o_1 - (1 - \sin(\phi)) \frac{(1 - \sin(\phi))o_1 + (1 + \sin(\phi))o_2 + (1 + \sin(\phi))o_3}{(1 - \sin(\phi))^2 + 2(1 + \sin(\phi))^2} \\ o_2 - (1 + \sin(\phi)) \frac{(1 - \sin(\phi))o_1 + (1 + \sin(\phi))o_2 + (1 + \sin(\phi))o_3}{(1 - \sin(\phi))^2 + 2(1 + \sin(\phi))^2} \\ o_3 - (1 + \sin(\phi)) \frac{(1 - \sin(\phi))o_1 + (1 + \sin(\phi))o_2 + (1 + \sin(\phi))o_3}{(1 - \sin(\phi))^2 + 2(1 + \sin(\phi))^2} \end{array} \right\} \quad (5.29d)$$

Assim, a escolha da solução óptima para o critério de Mohr-Coulomb resume-se aos seguintes passos:

- i. verificar se o ponto \mathbf{o} satisfaz a condição (2.23), estando, nesse caso, a solução óptima automaticamente encontrada;
- ii. não se verificando a situação anterior, entre as hipóteses (5.29a-d) excluir, primeiramente, as que não cumpram a condição (2.23), escolhendo-se, em seguida, aquela para a qual o valor da função (5.25) é menor.

5.3.3.1 Problemas de estados planos de deformação

Uma vez mais, esta situação pode ser tratada como um caso particular do problema 3D, bastando para tal impor,

$$e_{II} = 0 \wedge s_{II} = 0 \quad (5.30)$$

Deste modo, o ponto \mathbf{o} é dado por,

$$\mathbf{o} = \begin{Bmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{Bmatrix} s_I - \frac{c}{\tan(\phi)} \\ 0 \\ s_{III} - \frac{c}{\tan(\phi)} \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

Neste caso, o ponto sobre a superfície (5.28) mais próximo de \mathbf{o} só poderá estar eventualmente localizado sobre o vértice da superfície ou numa das aresta resultantes da intercepção desta com o plano (I, III) . Assim, as hipóteses possíveis ficam reduzidas apenas às seguintes:

$$\tilde{\mathbf{e}}^1 = \{0, 0, 0\}^T \quad (5.32a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^2 = \begin{Bmatrix} o_1 - (1 - \sin(\phi)) \frac{(1 - \sin(\phi))o_1 + (1 + \sin(\phi))o_3}{(1 - \sin(\phi))^2 + (1 + \sin(\phi))^2} \\ 0 \\ o_3 - (1 + \sin(\phi)) \frac{(1 - \sin(\phi))o_1 + (1 + \sin(\phi))o_3}{(1 - \sin(\phi))^2 + (1 + \sin(\phi))^2} \end{Bmatrix} \quad (5.32b)$$

A escolha da solução óptima do problema segue o mesmo procedimento bi-etápico descrito para o caso 3D.

5.3.4 Minimização local para o critério de Drucker-Prager

5.3.4.1 Problemas sólidos 3D

O critério de Drucker-Prager difere em relação ao de Mohr-Coulomb apenas no que respeita à condição de normalidade. Em resultado da condição (2.26) o espaço das soluções admissíveis apresenta agora a forma de um cone, esquematizado na Figura 5.3(a), sendo a superfície que o delimita definida pela equação:

$$e_I + e_{II} + e_{III} = \sqrt{\frac{2\sin^2\phi}{3 + \sin^2\phi} \left(3(e_I^2 + e_{II}^2 + e_{III}^2) - (e_I + e_{II} + e_{III})^2 \right)} \quad (5.33)$$

Analogamente ao critério de Mohr-Coulomb, se o ponto \mathbf{o} , resultante da expressão (5.31), satisfizer a condição (2.26) a solução da minimização fica automaticamente encontrada, não sendo necessário efectuar qualquer operação adicional:

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{o} \quad (5.34)$$

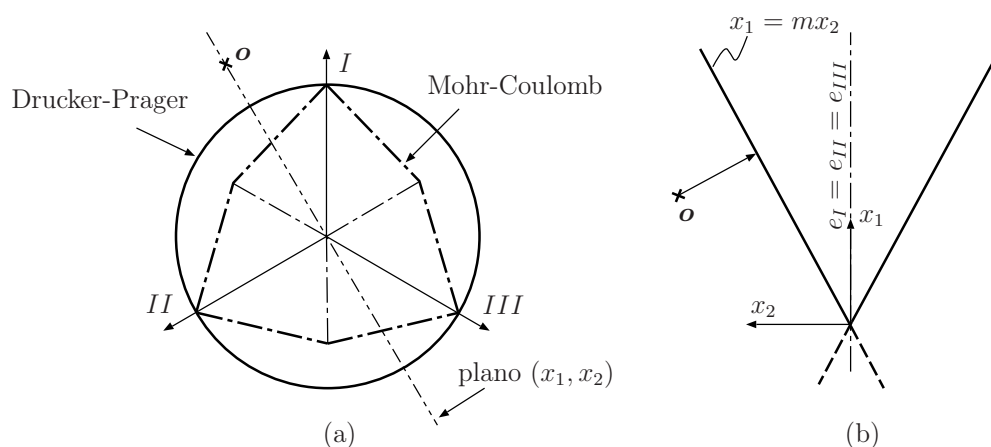


Figura 5.3: Espaço das soluções admissíveis

Caso contrário, considere-se a mudança de coordenadas definida por,

$$\tilde{\mathbf{e}} = [\boldsymbol{\eta}|\mathbf{o} - \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\eta}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

sendo a definição do vector \mathbf{o} dada pela expressão (5.27) e,

$$\boldsymbol{\eta}^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}$$

O espaço das coordenadas (x_1, x_2) define o plano formado pela recta $e_I = e_{II} = e_{III}$ e pelo ponto com as coordenadas \mathbf{o} (ver Figura 5.3).

De seguida, pretende-se definir a recta,

$$x_1 = m x_2 \quad (5.36)$$

que resulta da intercepção da superfície (5.33) com o plano (x_1, x_2) . Para tal, basta combinar as definições (5.33) e (5.35), obtendo-se o seguinte valor para o declive,

$$m = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2 \sin^2(\phi)}{3 + \sin^2(\phi)} a} \quad (5.37)$$

onde,

$$a = 2(\tilde{\mathbf{s}}^T \tilde{\mathbf{s}} - s_I s_{II} - s_I s_{III} - s_{II} s_{III}) \quad (5.38)$$

Da observação da Figura 5.3(b), facilmente se conclui que a hipótese de declive negativo ($m < 0$) deve ser liminarmente excluída.

A projecção do ponto, \mathbf{o} , sobre a superfície (5.33) pode ser obtida através o mínimo local da função (5.25) sobre a recta (5.36),

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}^*(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \\ x_1 = m x_2 \end{cases} \quad (5.39)$$

Do sistema de equações anterior resulta,

$$x_2 = \frac{r m \left(s_I + s_{II} + s_{III} - \frac{3c}{\tan(\phi)} \right) + a}{3r((r m)^2 + a)} \quad (5.40)$$

Note-se que, caso o valor de x_2 seja negativo, a solução não é válida. Esta situação corresponde à projecção efectuada sobre a zona da recta representada a tracejado, na Figura 5.3(b). Assim, pode concluir-se que, nesta situação, o ponto da superfície mais próximo da solução inicial é, de facto, o vértice do cone ($x_2 = 0$).

Por fim, através da mudança de coordenadas (5.35), obtém-se a solução final,

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} w(r m + 2s_I - s_{II} - s_{III}) \\ w(r m + 2s_{II} - s_I - s_{III}) \\ w(r m + 2s_{III} - s_I - s_{II}) \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

em que,

$$w = \begin{cases} x_2, & x_2 > 0 \\ 0, & x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

5.3.4.2 Problemas de estados planos de deformação

Para problemas de estados planos de deformação, o critério de Drucker-Prager coincide com o de Mohr-Coulomb já analisado.

5.3.5 Minimização local para as descontinuidades da formulação Híbrida/Mista

O problema de minimização local da parcela descontínua da formulação Híbrida/Mista é expresso através de (4.93). Este apresenta uma particularidade face ao problema de minimização da componente contínua. Com efeito, para os elementos quadráticos e quando se utiliza uma aproximação linear para as descontinuidades (campo das velocidades relativas), a parcela da penalidade da função objectivo apresenta um termo bilinear. Para ilustrar este facto, apresenta-se o desenvolvimento desta parcela para um elemento 2D (onde $n_P = 3$):

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{n_P} \frac{\Delta}{n_P} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma}^T \mathbf{U}_{\Gamma_j}^T \mathbf{U}_{\Gamma_j} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma} &= \frac{r\Delta}{6} \left(\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^T \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1} + \frac{1}{4} (\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1} + \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2})^T (\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1} + \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}) + \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^T \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2} \right) \\ &= \frac{r\Delta}{6} \left(\frac{5}{4} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^T \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1} + \frac{5}{4} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^T \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^T \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2} \right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

A existência do termo bilinear, assinalado a sublinhado em (5.43), elimina a natureza radial da função objectivo que é de manifesta utilidade como já se constatou durante a apresentação das estratégias de minimização da componente contínua. Com vista a recuperar esta propriedade, propõe-se a introdução de uma variável adicional associada à velocidade relativa dos nós intermédios. Esta é, na realidade, um grau de liberdade *virtual* já que não confere um aumento efectivo do número de graus de liberdade do problema. Com efeito, e de modo a garantir a obtenção de um campo estritamente compatível, é necessário acrescentar uma restrição por cada grau de liberdade adicionado. Essa última garantirá a linearidade do campo obtido, anulando o efeito do grau de liberdade adicional.

Na Figura 5.4 ilustram-se as funções de aproximação resultantes da introdução do grau de liberdade adicional, $q_{\Gamma 3}$, numa interface 2D. A restrição que garante a linearidade da solução é, naturalmente:

$$q_{\Gamma 3} = \frac{1}{2}(q_{\Gamma 1} + q_{\Gamma 2}) \quad (5.44)$$

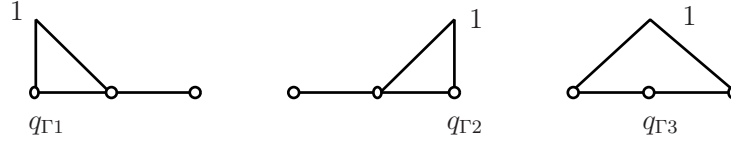


Figura 5.4: Funções aproximação para descontinuidades 2D

As funções de aproximação correspondentes à introdução de graus de liberdade adicionais, no caso da interface de elementos 3D, são representadas na Figura 5.5, devendo, neste caso, a restrição (5.44) ser alargada aos pontos intermédios correspondentes, ou seja,

$$q_{\Gamma 4} = \frac{1}{2}(q_{\Gamma 1} + q_{\Gamma 2}), \quad q_{\Gamma 5} = \frac{1}{2}(q_{\Gamma 2} + q_{\Gamma 3}), \quad q_{\Gamma 6} = \frac{1}{2}(q_{\Gamma 1} + q_{\Gamma 3}) \quad (5.45a-c)$$

Face ao exposto, um funcional Lagrangeano equivalente ao do problema de minimização local (4.93) pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{L}_d^*(\tilde{\mathbf{q}}_\Gamma) = \begin{cases} \bar{\mathcal{D}} - \sum_{j=1}^{n_P} \tilde{\mathbf{s}}_j^T \mathbf{q}_{\Gamma j} + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{n_P} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma j}^T \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma j}, & n_I \neq 1 \\ \bar{\mathcal{D}} - \mathbf{q}_\Gamma^T \sum_{j=1}^{n_P} \tilde{\mathbf{s}}_j + n_P \frac{r}{2} \tilde{\mathbf{q}}_\Gamma^T \tilde{\mathbf{q}}_\Gamma, & n_I = 1 \end{cases} \quad (5.46)$$

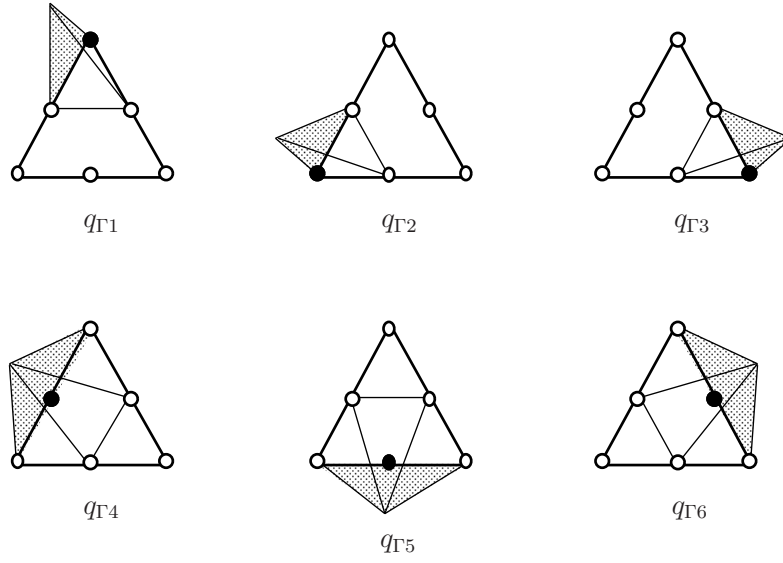


Figura 5.5: Funções aproximação para descontinuidades 3D

em que,

$$\overline{\mathcal{D}} = \frac{n_P}{\Delta} \int_{\Gamma_d} \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{q}}_\Gamma) d\Gamma \quad (5.47)$$

Refere-se ainda que o vector $\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_j}$ armazena as componentes normal, q^n , e tangencial, q^t , dos graus de liberdade associados ao nó j , para os casos 2D e 3D, pela seguinte ordem:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_j} = \left\{ \begin{array}{c} q^n \\ q^t \end{array} \right\}_j, \quad \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_j} = \left\{ \begin{array}{c} q^n \\ q^{t1} \\ q^{t2} \end{array} \right\}_j \quad (5.48a-b)$$

5.3.5.1 Materiais friccionais

Para os materiais friccionais, a componente da dissipação, $\overline{\mathcal{D}}$, é dada por:

$$\overline{\mathcal{D}} = \sum_{j=1}^{n_V} \frac{c_j}{\tan \phi} q_j^n \quad (5.49)$$

com,

$$c_j = c \frac{n_P}{n_I \Delta} \Delta_j \quad (5.50)$$

Na expressão anterior, Δ_j é o comprimento ou área da região onde a função de aproximação local associada ao nó j é não nula. Note-se que $\Delta_j = \Delta$, excepto para os casos representados nas Figuras 5.4 e 5.5. Por sua vez, os valores de n_P e n_I podem ser consultados na Tabela 4.3 e o número de variáveis nodais, n_V , é dado por:

$$n_V = \begin{cases} n_P, & n_I \neq 1 \\ n_I, & n_I = 1 \end{cases} \quad (5.51)$$

Descreve-se agora a determinação da solução óptima dos graus de liberdade associados a pontos localizados na extremidade da fronteira (não intermédios), para o caso 3D. Refira-se que a solução do caso 2D pode ser obtida a partir da solução 3D impondo, para tal, que uma das componentes tangenciais seja nula. Salienta-se que, à semelhança do que ocorre para a componente contínua, também nesta situação a solução para cada nó (incluindo os nós intermédios, caso existam) é independente dos restantes nós.

Assim, impondo a condição,

$$\nabla \mathcal{L}_d^*(\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_j}) = 0 \quad (5.52)$$

obtém-se,

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_j}^0 = \frac{1}{r} \left(\tilde{\mathbf{s}}_j - \frac{c_j}{\tan \phi} \{1, 0, 0\}^T \right) \quad (5.53)$$

Para manter a validade da expressão anterior no caso de $n_I = 1$, $\tilde{\mathbf{s}}_j$ e r deverão ser substituídos, respectivamente, por:

$$\tilde{\mathbf{s}}'_j = \sum_{j=1}^{n_P} \tilde{\mathbf{s}}_j, \quad r' = n_P r \quad (5.54a-b)$$

Até aqui, procedeu-se à minimização sem garantir quer a condição de linearidade dos pontos intermédios (5.45) quer a condição de normalidade (2.28). Para satisfazer a primeira das condições anteriores recorre-se ao Método dos Mínimos Quadrados de modo a encontrar o melhor ajustamento dos pontos determinados a uma solução linear. É possível demonstrar que, com esta abordagem, a solução obtida é análoga à do caso em que não tivessem sido utilizadas as variáveis adicionais para os pontos intermédios. Assim, da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para o caso

3D, expresso através do problema de minimização,

$$\begin{aligned} \text{Min } Q(\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}, \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}, \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_3}) &= (\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1} - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^0)^2 + (\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2} - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^0)^2 + (\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_3} - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_3}^0)^2 \\ &+ \left(\frac{\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1} + \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}}{2} - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_4}^0\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2} + \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_3}}{2} - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_5}^0\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1} + \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_3}}{2} - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_6}^0\right)^2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

resulta a seguinte solução para os pontos das extremidades:

$$\mathbf{o} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1} = \frac{1}{10}(7\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^0 - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^0 - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_3}^0 + 3\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_4}^0 - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_5}^0 + 3\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_6}^0) \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2} = \frac{1}{10}(-\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^0 + 7\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^0 - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_3}^0 + 3\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_4}^0 + 3\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_5}^0 - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_6}^0) \\ \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_3} = \frac{1}{10}(-\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_1}^0 - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_2}^0 + 7\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_3}^0 - \tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_4}^0 + 3\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_5}^0 + 3\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_6}^0) \end{cases} \quad (5.56)$$

Na circunstância dos pontos da solução (5.56) respeitarem a condição de normalidade (2.28), verificada através de,

$$\frac{q_j^n}{q_j^t} \geq \tan \phi \quad (5.57)$$

onde,

$$q_j^t = \sqrt{(q_j^{t1})^2 + (q_j^{t2})^2}, \quad \cos \alpha = \frac{q_j^{t1}}{q_j^t}, \quad \sin \alpha = \frac{q_j^{t2}}{q_j^t} \quad (5.58a-c)$$

a solução fica automaticamente encontrada. Contrariamente, basta projectar aqueles pontos que não a satisfazem sobre a superfície do espaço das soluções admissíveis. Esta operação é ilustrada na Figura (5.6), e o seu resultado é dado por:

$$q_j^n = b_j \sin \phi \cos \phi, \quad q_j^t = b_j \cos^2 \phi \quad (5.59a-b)$$

em que,

$$b_j = \begin{cases} o_j^t + o_j^n \tan \phi, & o_j^n > -\frac{o_j^t}{\tan \phi} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.60)$$

Deste modo, a solução final é dada através da expressão,

$$\tilde{\mathbf{q}}_{\Gamma_j} = \begin{pmatrix} q_1^n \\ q_1^t \cos \alpha \\ q_1^t \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

Uma vez determinadas as velocidades relativas para os pontos das extremidades, a

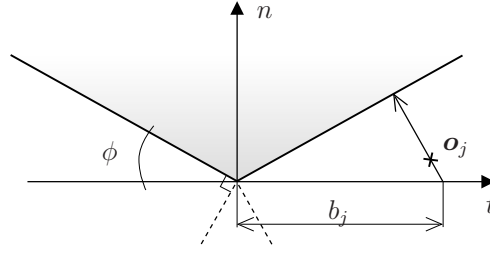


Figura 5.6: Projecção sobre a superfície do espaço das soluções admissíveis

solução dos pontos intermédios é obtida com base na média dos valores dos pontos das extremidades que estejam associados ao mesmo lado.

5.3.5.2 Materiais puramente coesivos

A minimização local de descontinuidades para materiais puramente coesivos efectua-se apenas para as componentes tangenciais da velocidade relativa, dado que a condição de normalidade (2.30) força a que a componente normal seja nula,

$$q_j^n = 0 \quad (5.62)$$

Na maioria dos casos ($n_I > 1$), revela-se demasiado complexo proceder à minimização local, avaliando, de um modo exacto, a dissipação plástica nas descontinuidades. Alternativamente, propõe-se a utilização do seguinte majorante para a componente da dissipação, $\bar{\mathcal{D}}$, dado por:

$$\sum_{j=1}^{n_V} k_{Ij} \sqrt{(q_j^{t1})^2 + (q_j^{t2})^2} \geq \bar{\mathcal{D}} \quad (5.63)$$

com,

$$k_{Ij} = k_I \frac{n_P}{n_I \Delta} \Delta_j \quad (5.64)$$

Nas expressões anteriores, n_V e Δ_j mantêm as definições que lhes foram atribuídas na secção precedente durante a análise da minimização para os materiais friccionais. Para permitir a utilização da expressão (5.63) no caso 2D, basta assumir que $q_j^{t1} = q_j^t$ e $q_j^{t2} = 0$. Além disso, no caso de $n_I = 1$, os parâmetros $\tilde{\mathbf{s}}_j$ e r deverão ser substituídos pelos parâmetros alternativos definidos em (5.54).

Descreve-se, agora, a obtenção da solução óptima do Lagrangeano de (5.46) para cada ponto da fronteira. Analisando a função objectivo nodal obtida da combinação de (5.46) com (5.63), é possível concluir que existem 2 pontos que são possíveis candidatos à solução:

$$q_j^{t1} = q_j^{t2} = 0 \quad (5.65a)$$

ou,

$$q_j^{ti} = \begin{cases} s_j^{ti} \frac{\sqrt{(s_j^{t1})^2 + (s_j^{t2})^2} - k_{Ij}}{r \sqrt{(s_j^{t1})^2 + (s_j^{t2})^2}}, s_j^{ti} \neq 0 \\ 0, s_j^{ti} = 0 \end{cases} \quad \text{com } i = 1, 2 \quad (5.65b)$$

A opção entre (5.65a) e (5.65b) faz-se determinando qual a que produz um melhor valor na função objectivo.

Contudo, a solução precedente não garante as condições de linearidade da solução, (5.44) ou (5.45), para as interfaces entre elementos quadráticos. Para tal, basta seguir o procedimento anteriormente descrito para os materiais friccionais: ajuste dos pontos obtidos a uma solução linear através do Método dos Mínimos Quadrados (5.55). Seguindo uma vez mais o procedimento adoptado para os materiais friccionais, a solução para os pontos intermédios é obtida *a posteriori* com base numa média dos valores dos pontos extremos.

5.4 Corpos Rígidos

Descreve-se, de seguida, o modo de incorporar corpos rígidos na implementação da presente formulação. É evidente que, na prática, estes poderiam ser modelados através da atribuição de propriedades mecânicas fictícias conferindo elevada resistência aos elementos finitos que os constituem. Ficaria, assim, impossibilitada a deformação plástica destes elementos na formação do mecanismo de colapso óptimo, por estar, necessariamente, associada a dissipações in comportavelmente elevadas. Todavia, do ponto de vista numérico, este procedimento é ineficiente. Repare-se que, não só durante o processo de minimização local estes elementos seriam desnecessariamente processados, como também haveria uma utilização de graus de liberdade supérfluos no sistema governativo global.

A alternativa consiste em associar a cada corpo rígido um nó virtual localizado na

origem do sistema de coordenadas global (Figura 5.7). A este nó são atribuídos 6 graus de liberdade: 3 velocidades (d_x, d_y, d_z) e 3 velocidades angulares ($d_{\theta_x}, d_{\theta_y}, d_{\theta_z}$).

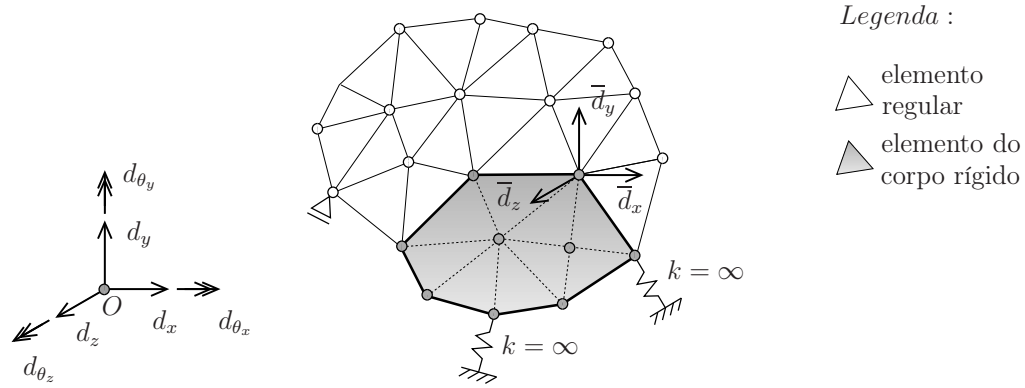


Figura 5.7: Graus liberdade de um corpo rígido

Através de uma matriz de transformação, \mathbf{T} , é possível estabelecer uma relação única entre os graus de liberdade do nó virtual e os graus de liberdade de velocidade de um nó genérico, i , que pertença a um dos elementos que constituem o corpo rígido:

$$\bar{\mathbf{d}}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{T}_i^T \bar{\mathbf{d}}_i \quad (5.66a-b)$$

com,

$$\bar{\mathbf{d}}_i = \begin{Bmatrix} \bar{d}_x \\ \bar{d}_y \\ \bar{d}_z \end{Bmatrix}_i, \quad \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & z_i & -y_i \\ \cdot & 1 & \cdot & -z_i & \cdot & x_i \\ \cdot & \cdot & 1 & y_i & -x_i & \cdot \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ d_{\theta_x} \\ d_{\theta_y} \\ d_{\theta_z} \end{Bmatrix} \quad (5.67a-c)$$

em que, x_i, y_i e z_i são as coordenadas do nó i .

Este facto permite eliminar todos os graus de liberdade associados a nós do corpo rígido do sistema governativo global, substituindo-os, alternativamente, pelas variáveis do nó virtual. Para tal, é necessário que, antes de se realizar a operação de *espalhamento* das contribuições elementares, se proceda à transformação das grandezas calculadas para os graus de liberdade locais dos nós, $\bar{\mathbf{d}}$, representadas por $\bar{\mathbf{A}}$

e $\bar{\mathbf{V}}$, em grandezas referentes aos graus de liberdade globais \mathbf{d} :

$$\mathbf{A}_{ij}^{\textcircled{e}} = \mathbf{T}_i^T \bar{\mathbf{A}}_{ij}^{\textcircled{e}} \mathbf{T}_j \quad (5.68a)$$

$$\mathbf{V}_i^{\textcircled{e}} = \mathbf{T}_i^T \bar{\mathbf{V}}_i^{\textcircled{e}}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{F}, \tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{\Lambda} \text{ ou } \mathbf{L} \quad (5.68b)$$

Na expressão anterior, \textcircled{e} simboliza que a grandeza em questão se trata de uma contribuição elementar. Os índices i e j são referentes aos nós considerados. Na circunstância de um nó não pertencer a um corpo rígido, a matriz de transformação a ele associado assume a forma da matriz identidade, $\mathbf{T} = \mathbf{I}$.

Por sua vez, as condições de apoio impostas ao nó i , do corpo rígido, são introduzidas no modelo através do seguinte artifício numérico:

$$\mathbf{A}_{ii}^{\textcircled{e}} = \mathbf{T}_i^T \begin{bmatrix} k_x & \cdot & \cdot \\ \cdot & k_y & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_z \end{bmatrix} \mathbf{T}_i \quad (5.69)$$

onde k_x , k_y e k_z têm o valor 0 ou ∞ (ou seja, um valor numérico muito elevado), consoante o deslocamento na direcção em questão se encontre livre ou restringido, respectivamente.

Esta utilização das variáveis do nó virtual no sistema governativo global em detrimento das variáveis nodais locais pode representar uma redução considerável de graus de liberdade.

A consideração de elementos de corpo rígido permite também que estes sejam ignorados aquando do processo de cálculo, nomeadamente, na montagem da matriz do sistema governativo e na minimização local. Mais ainda, não é necessário associar multiplicadores de Lagrange a estes elementos, abreviando-se o processo de actualização dos mesmos. Ressalva-se que é, no entanto, indispensável contabilizar as forças de massa a eles associadas para o cálculo dos vectores \mathbf{F} e $\tilde{\mathbf{F}}$.

5.5 Pós-processamento da solução

Nesta secção é apresentado um algoritmo expedito para melhorar a solução na fase de pós-processamento. As considerações aqui efectuadas apenas dizem respeito às

análises efectuadas com elementos quadráticos e materiais puramente coesivos.

Como foi visto na secção 5.3 referente às estratégias de minimização local, para os critérios de Tresca e de von Mises a contabilização da dissipação plástica em cada elemento é realizada através de uma expressão que majora o valor da dissipação efectiva (5.1).

Assim, uma melhoria da estimativa da carga de colapso pode ser obtida recalculando o valor da dissipação de uma forma mais precisa, com base no campo cinemático determinado inicialmente. É, no entanto, necessário garantir que o valor da dissipação não seja subestimado. Refira-se que o custo computacional de tal operação é significativamente reduzido.

O algoritmo idealizado para este efeito é muito simples, e consiste em subdividir recursivamente o elemento, reavaliando a dissipação nas novas regiões resultantes com base na expressão majorante (5.1). A decisão de prosseguir com o refinamento de uma dada subregião faz-se caso a redução da dissipação em relação ao nível anterior tenha sido superior a um valor estipulado (usualmente 1%).

A título de exemplo representa-se, na Figura 5.8, 3 etapas sucessivas do processo de subdivisão para um elemento triangular.

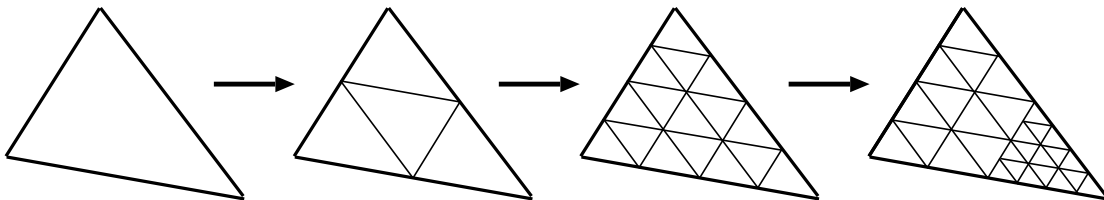


Figura 5.8: Subdivisão de um elemento triangular para o cálculo da dissipação em pós-processamento

Os testes numéricos efectuados permitiram constatar que, para malhas com um nível médio de refinamento, o pós-processamento das soluções permite habitualmente uma redução entre 1 a 3% do valor da estimativa da carga de colapso. Estes valores tendem a reduzir com o aumento do nível de refinamento das malhas utilizadas.

Para concluir, refere-se que esta estratégia também poderia ser utilizada para melhorar a contribuição da parcela das descontinuidades 3D, quando se utiliza um material do tipo puramente coesivo e campos lineares para a velocidade relativa. No entanto, esta possibilidade não foi explorada no presente trabalho.

Capítulo 6

Processamento paralelo

6.1 Introdução

Não obstante os notáveis desenvolvimentos tecnológicos observados na área da informática, tanto a nível da velocidade de processamento, da capacidade de memória e de armazenamento de dados bem como da velocidade de comunicação de dados, a determinação de estimativas precisas de cargas de colapso de sistemas mecânicos com um comportamento perfeitamente plástico pode, ainda hoje, representar um esforço computacional significativo. Este facto agudiza-se particularmente na resolução da generalidade dos problemas de geometrias sólidas 3D. Em muitos destes problemas constata-se, inclusivamente, uma diminuição apreciável da qualidade dos resultados obtidos decorrente de limitações nas capacidades de cálculo, designadamente de memória.

Com o intuito de colmatar estas limitações surgiu a motivação e interesse pela abordagem proposta neste capítulo: o desenvolvimento da implementação paralela do modelo proposto. Recorrendo a esta estratégia é possível resolver problemas de grandes dimensões que excedem as capacidades de cálculo associadas a um único computador, tornando, simultaneamente, comportável o tempo despendido na análise.

A utilização de computação paralela na mecânica computacional encontra-se actualmente largamente difundida. Embora tenha vindo a ser objecto de grande desenvolvimento nos últimos anos, parece no entanto ter sido até agora uma abordagem

negligenciada na área da Análise Limite, facto comprovado pela aparente inexistência de documentação científica neste domínio.

Uma análise atenta da formulação proposta revela uma evidente adequabilidade do processo iterativo utilizado para ser transposto num algoritmo de processamento paralelo. Observe-se que, das três principais fases do processo iterativo que representam o maior consumo de tempo de cálculo, duas delas se processam ao nível de cada elemento finito, nomeadamente, a *minimização local* e a *atualização dos multiplicadores de Lagrange*. As vantagens decorrentes deste facto são notórias: os procedimentos utilizados no algoritmo sequencial não requerem quaisquer adaptações para a implementação paralela, bastando apenas definir uma distribuição de elementos para cada processador envolvido nos cálculos, o qual fica encarregue de processar os elementos a ele atribuídos. Adicionalmente, e dado que no decorrer destas etapas não existe necessidade de comunicações inter-processadores para troca de dados, sempre penalizadoras no que respeita ao consumo de tempo, é possível atingir uma excelente *escalabilidade*¹.

Contrariamente ao que foi observado para as fases referidas anteriormente, a fase da *minimização global* requer a contribuição e envolvimento simultâneo de todos os elementos finitos do modelo. É nesta fase que, num algoritmo paralelo de resolução do problema, se concentra o volume mais significativo de comunicações inter-processadores, ficando o desempenho desse algoritmo condicionado essencialmente pela eficiência revelada durante esta fase. Foi por isso dedicado especial relevo ao tratamento do problema associado à *minimização global*: a resolução em paralelo de um sistema de equações linear, tendo em atenção as especificidades que advêm da formulação.

6.2 Paralelização do algoritmo

Apresenta-se, de seguida, a descrição da paralelização do modelo de elementos finitos para Análise Limite aqui proposto.

¹Entende-se por *escalabilidade* a capacidade de um algoritmo melhorar o seu desempenho proporcionalmente ao aumento do número de processadores envolvidos nos cálculos

6.2.1 Considerações iniciais

Ao conceber um algoritmo paralelo é fundamental ter em consideração as características do tipo de arquitectura paralela que se pretende utilizar. O algoritmo aqui desenvolvido destina-se a um modelo de arquitectura de memória distribuída, na qual a comunicação de dados entre diferentes processos é realizada através de um sistema de troca de mensagens. Para a sua implementação recorreu-se à interface de programação padrão MPI (Message Passing Interface) [118].

No tipo de arquitectura supramencionado a necessidade de comunicações de dados inter-processadores representa uma penalização para o desempenho do algoritmo devido à velocidade muito inferior a que estas se processam comparativamente com as comunicações CPU/memória. Deste modo, no modelo paralelo implementado, estas devem ser limitadas a um mínimo estritamente necessário, sendo, em geral, considerada uma boa prática procurar enviar um número reduzido de mensagens grandes em detrimento de um número elevado de pequenas mensagens.

O primeiro passo para atingir este objectivo passa por executar uma partição adequada do domínio em estudo. Considerou-se fora do âmbito deste trabalho o desenvolvimento de um algoritmo de partição do domínio, tendo-se recorrido para este efeito, sempre que necessário, a um *software* de código aberto denominado MeTiS [64]. Contudo, julga-se indispensável enumerar as características fundamentais que um algoritmo deste tipo deverá exibir. Assim, tal como é salientado em [4], um bom algoritmo de partição de domínio deverá ser capaz de fornecer, para qualquer malha de elementos finitos (mesmo de uma geometria irregular), uma distribuição de elementos em subdomínios, que garanta:

- i. a obtenção de um bom *balanceamento de carga*, ou seja que, os elementos atribuídos a cada subdomínio deverão ser repartidos equitativamente, proporcionando uma distribuição semelhante de graus de liberdade e, conseqüentemente, um volume de cálculo idêntico a cada processador;
- ii. que o número de nós partilhado por elementos de diferentes subdomínios seja o menor possível. Esta medida conduz a uma redução do volume de comunicações inter-processadores. É ainda conveniente evitar que os nós das interfaces dos subdomínios pertençam a mais do que dois subdomínios simultaneamente, reduzindo deste modo a largura de banda ou o perfil da matriz complementar

de Schur, a qual estabelece a ligação entre os graus de liberdade das interfaces dos subdomínios;

- iii. que o tempo despendido pelo algoritmo de partição seja pouco significativo quando comparado com o tempo total de resolução do problema.

6.2.2 Paradigma *Master/Slaves*

O algoritmo paralelo proposto baseia-se no paradigma *Master/Slaves*. Este paradigma demarca os processos atribuídos a cada processador em duas entidades bem distintas. O processo *Master*, que é único, fica encarregue de decompor o problema em tarefas que distribui para serem executadas pelos restantes processos denominados *Slaves*. O *Master* acumula ainda a função de recolher resultados parciais dos *Slaves* de modo a controlar e coordenar a evolução dos cálculos. Deste modo, durante toda a computação, a interacção directa entre processos *Slaves* é inexistente ou definida *a priori* pelo *Master*.

Convém ainda esclarecer que na computação paralela é usual atribuir-se um processo a cada processador disponível. Não é, no entanto, forçoso que assim seja: por exemplo, no caso do volume de cálculo do processo *Master* ser significativamente inferior ao dos *Slaves*, pode justificar-se que um mesmo processador seja incumbido de executar o processo *Master* e um processo *Slave*.

Tendo em atenção a descrição genérica apresentada para as funções atribuídas aos processos *Master* e *Slave*, cabe agora detalhar as mesmas para o modelo proposto. Assim, o algoritmo inicia-se no *Master* com a execução da partição do domínio e sua comunicação aos *Slaves*, sendo que cada *Slave* recebe apenas a informação necessária associada aos elementos que a partição efectuada lhe atribui. A partição do domínio depende do método adoptado para a resolução do sistema governativo da minimização global. Para este efeito foram implementados quatro métodos alternativos os quais serão apresentados e discutidos em detalhe na secção 6.3. Desde já se adianta que, para a generalidade dos métodos de resolução utilizados, se optou por uma partição de domínio sem sobreposição de elementos, sendo o *balanceamento da carga* baseado numa distribuição de igual número de elementos para os diferentes subdomínios, conforme é exemplificado na Figura 6.1(a). A excepção observa-se para o algoritmo proposto na secção 6.3.3. Neste método de resolução optou-se por

uma partição de domínio com sobreposição de elementos, onde o critério de *balanceamento da carga* assenta numa distribuição equitativa dos graus de liberdade nodais pelos diversos subdomínios. Assim, conforme é exemplificado na Figura 6.1(b), um elemento que contenha um nó partilhado pertence também ele simultaneamente a dois subdomínios. É evidente que este tipo de partição resulta numa redundância de cálculos efectuados pelos *Slaves*, mas este facto não corresponde necessariamente a uma perda de desempenho já que é compensado por um menor volume de comunicações inter-processadores. A escolha de uma alternativa de partição de domínio com sobreposição de elementos justifica-se pelo tipo de armazenamento efectuado pelo algoritmo de resolução do sistema, armazenamento este, também ele com informação redundante, já que, por razões de eficiência, não tira partido da simetria da matriz do sistema.

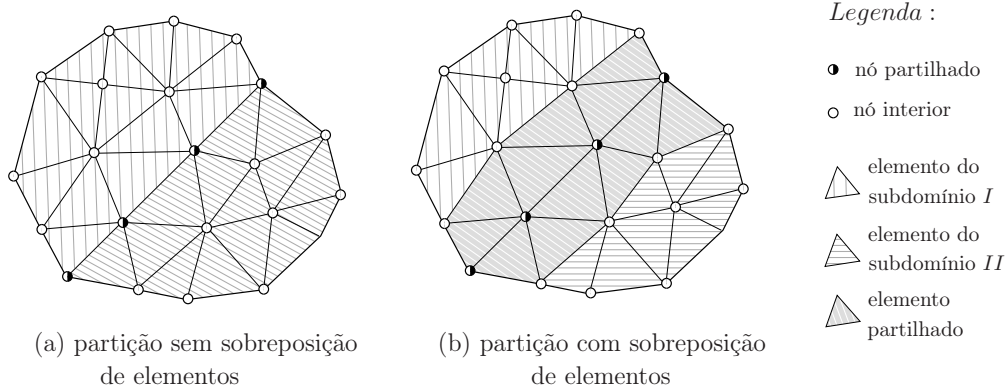


Figura 6.1: Ilustração das estratégias de partição de domínio para 2 subdomínios

Uma vez recebida a informação proveniente do *Master*, os *Slaves* procedem à computação das contribuições dos elementos finitos dos respectivos subdomínios para o sistema governativo da minimização global, seguida da *assemblagem* do sistema. É importante referir que a matriz do sistema governativo é dividida em blocos, estando estes distribuídos e armazenados pelos diferentes *Slaves* e pelo *Master*. Por sua vez, a *assemblagem* do sistema poder-se-à processar explicitamente ou implicitamente. O procedimento de *assemblagem* bem como a divisão e modo de armazenamento dos blocos que constituem o sistema são factores que estão naturalmente dependentes do método de resolução preconizado.

Esta fase inicial da computação paralela termina com a factorização, completa ou parcial, do sistema governativo, dando-se então início ao processo iterativo de Uzawa. Uma vez mais, o tipo de factorização é também ele dependente do método de reso-

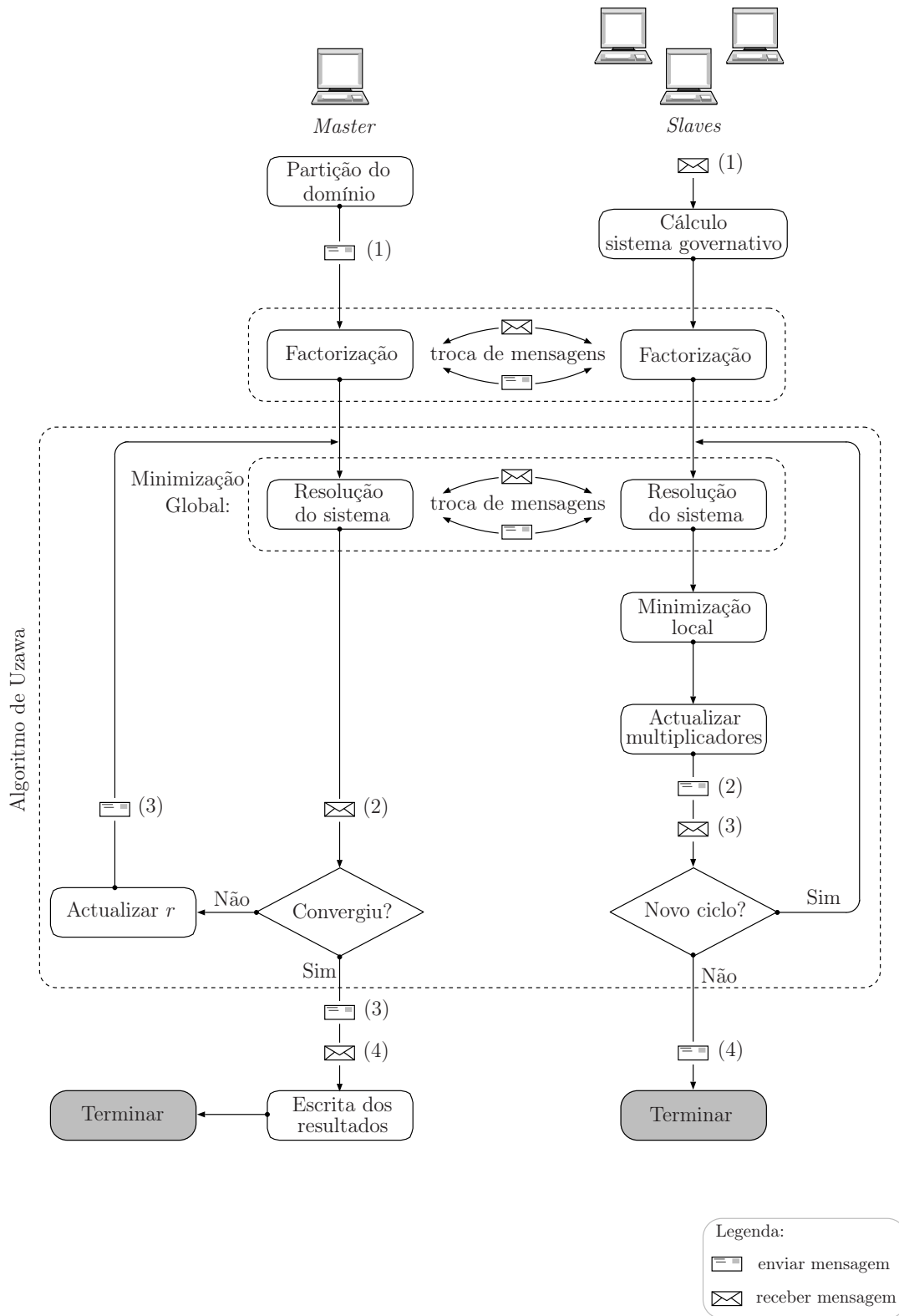


Figura 6.2: Diagrama do algoritmo paralelo

lução adoptado.

Conforme ilustrado no diagrama da Figura 6.2, o algoritmo de Uzawa não requiere alterações significativas. Além disso, durante este processo iterativo só há três ocasiões em que existe a necessidade de estabelecer comunicações inter-processadores. A primeira ocasião regista-se durante a fase da minimização global, sendo esta a que envolve o maior volume de troca de dados. De facto, a troca de dados observada nas restantes ocasiões é, comparativamente, insignificante. Após a fase da actualização dos multiplicadores, os *Slaves* comunicam ao *Master* o valor do máximo erro para a taxa das deformações resultante da diferença entre as aproximações global e local,

$$\epsilon_{rr}^{\text{máx}} = \text{máx} \{BN_i d_i - e_i\} \quad (6.1)$$

Adicionalmente, os *Slaves* fornecem ao *Master* os valores do trabalho das forças fixas e da dissipação plástica dos respectivos subdomínios.

Finalmente, ao concluir uma iteração, o *Master* informa os *Slaves* se deverão ou não executar uma nova iteração. Em caso afirmativo, comunica também o valor actualizado do parâmetro de penalização, r .

6.3 Resolução do sistema governativo da minimização global

Conforme salientado anteriormente, o desempenho do algoritmo paralelo depende em grande medida da eficiência conseguida na implementação do método de resolução do sistema governativo da minimização global. Deste modo foi dedicada particular atenção a este aspecto, tendo sido testadas diversas alternativas.

Os métodos de resolução iterativos são, sem dúvida, os mais difundidos para a resolução em paralelo de sistemas de equações lineares, esparsos, bem condicionados e de grandes dimensões, sendo todas estas características observadas nos sistemas governativos resultantes do modelo desenvolvido. São diversas as razões que se podem apontar para justificar esta primazia em detrimento dos métodos de resolução directos. Desde já refere-se que a implementação em paralelo dos métodos iterativos é, em geral, pouco complexa. Adicionalmente, estes últimos requerem, comparati-

vamente aos métodos directos, menos memória e menor volume de comunicações inter-processadores. Outra razão importante é o facto do número de operações necessárias de vírgula flutuante crescer, naturalmente, com a dimensão do sistema de equações, sendo este crescimento mais acentuado no caso dos métodos directos.

Contudo, os métodos de resolução directa, para além da sua robustez numérica, tendem a suplantar o desempenho dos iterativos sempre que se pretenda resolver um sistema de equações com múltiplos termos independentes. A explicação deste facto é evidente: a factorização da matriz, que representa o consumo mais significativo de tempo de cálculo, é efectuada uma única vez, sendo que a solução para os diferentes termos independentes é obtida através de um procedimento combinado de substituição directa e retrossubstituição. Estas situações de múltiplos termos independentes surgem com alguma frequência na área da mecânica estrutural. Vejam-se os exemplos, em regime elástico, de problemas de estruturas sujeitas a diversas combinações de carregamento ou a determinação da resposta dinâmica com integração numérica passo-a-passo no domínio do tempo.

Também para a adaptação do algoritmo de Uzawa feita no presente trabalho se verifica que a matriz do sistema governativo permanece inalterada no decorrer do processo iterativo modificando-se apenas o termo independente. Assim sendo, e tendo em consideração os argumentos acima expostos, a escolha do método de resolução adoptado recaiu na utilização de métodos directos (seguindo a mesma estratégia anteriormente utilizada para a implementação sequencial do modelo). Entre estes, três alternativas distintas foram implementadas, as quais serão objecto das subsecções seguintes.

Adicionalmente, foi igualmente implementado um método híbrido denominado FETI (o acrónimo de **F**inite **E**lement **T**earing and **I**nterconnecting) [39], [44], [108], que combina um método de resolução directo com um método iterativo. Este é, porventura, um dos métodos paralelos mais utilizado e mais bem sucedido na resolução de sistemas lineares resultantes de problemas regidos por equações diferenciais parciais elípticas [36].

A ideia fundamental subjacente à maioria dos métodos aqui apresentados é simples: dividir o sistema de equações inicial num conjunto de sub-sistemas independentes e de menores dimensões, estabelecendo simultaneamente um conjunto de equações adicional que impõe a ligação entre os diferentes sub-sistemas de equações. Os méto-

dos de resolução que adoptam este tipo de abordagem denominam-se genericamente por métodos de decomposição de domínio [125].

Nos pontos seguintes far-se-á a descrição das diferentes estratégias de resolução adoptadas.

6.3.1 Método de subestruturação

No método de subestruturação [125], o domínio original é particionado num conjunto de n_{SD} sub-domínios, não sobrepostos. Com base numa técnica de condensação, os graus de liberdade associados aos nós internos de cada partição são eliminados do sistema original, permanecendo apenas as incógnitas nodais dos nós localizados nas fronteiras dos sub-domínios.

Para tal, considere-se um sistema linear de equações escrito numa forma genérica, podendo este representar o sistema governativo associado à minimização global do algoritmo de Uzawa,

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{R} \quad (6.2)$$

Adicionalmente, assumam-se a matriz \mathbf{A} como sendo simétrica e não-singular. Agrupando convenientemente os graus de liberdade dos nós interiores de cada sub-domínio e os dos nós das fronteiras, o sistema (6.2) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_I^1 & & & & \mathbf{A}_C^1 \\ & \mathbf{A}_I^2 & & & \mathbf{A}_C^2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \mathbf{A}_I^{n_{SD}} & \mathbf{A}_C^{n_{SD}} \\ (\mathbf{A}_C^1)^T & (\mathbf{A}_C^2)^T & & (\mathbf{A}_C^{n_{SD}})^T & \mathbf{A}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_I^1 \\ \mathbf{q}_I^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_I^{n_{SD}} \\ \mathbf{q}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_I^1 \\ \mathbf{R}_I^2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_I^{n_{SD}} \\ \mathbf{R}_F \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

onde, o vector \mathbf{q}_I^i agrupa os graus de liberdade dos nós interiores correspondentes ao sub-domínio i . Por sua vez, as incógnitas nodais das fronteiras são agrupadas no vector \mathbf{q}_F .

Através da manipulação algébrica das equações do sistema (6.3) é possível exprimir

as incógnitas nodais interiores em função das incógnitas da fronteira,

$$\mathbf{q}_I^i = (\mathbf{A}_I^i)^{-1} (\mathbf{R}_I^i - \mathbf{A}_C^i \mathbf{q}_F) \quad (6.4)$$

Combinando agora (6.4) com o último bloco de equações do sistema (6.3), eliminam-se as incógnitas dos nós interiores, \mathbf{q}_I , e obtém-se um novo sistema de equações condensado, no qual se conservam apenas as incógnitas nodais associadas às fronteiras dos sub-domínios,

$$\mathbf{S} \mathbf{q}_F = \mathbf{R}_S \quad (6.5)$$

Na equação (6.5) expressão da matriz complementar de Schur, \mathbf{S} , em relação às incógnitas nodais, \mathbf{q}_F , é dada por,

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}_F - \sum_{i=1}^{n_{SD}} (\mathbf{A}_C^i)^T (\mathbf{A}_I^i)^{-1} \mathbf{A}_C^i \quad (6.6)$$

e a expressão do termo independente por,

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{R}_F - \sum_{i=1}^{n_{SD}} (\mathbf{A}_C^i)^T (\mathbf{A}_I^i)^{-1} \mathbf{R}_I^i \quad (6.7)$$

Como se pode observar, \mathbf{S} e \mathbf{R}_S resultam da junção de contribuições locais dos sub-domínios aos termos de fronteira iniciais, \mathbf{A}_F e \mathbf{R}_F .

É com base neste método que foi realizada a implementação do primeiro algoritmo utilizado para a resolução do sistema governativo da minimização global. Assim, determina-se que cada *Slave* fica encarregue de calcular a respectiva contribuição para o problema da interface (6.5), transferindo-a, uma vez calculada, para o *Master*. Esta contribuição, engloba para além da respectiva parcela do somatório da expressão (6.6), as parcelas dos termos da matriz \mathbf{A}_F cujos elementos pertencem à partição do *Slave*.

Este fica encarregue de todos os cálculos associados ao problema de interface, nomeadamente, de armazenar a matriz complementar de Schur (6.6) e proceder à respectiva factorização. Por fim, fornece a solução das incógnitas da interface mediante um processo de substituição directa combinada com retrosubstituição.

No entanto, é importante referir que esta estratégia de resolução apresenta uma fraca escalabilidade. Além disso tem também uma limitação intrínseca no que respeita à dimensão dos problemas que é capaz de resolver, atendendo ao facto da dimensão do sistema de interface (6.5) crescer com o aumento do número de sub-domínios. Adicionalmente, a matriz complementar de Schur apresenta uma estrutura significativamente mais densa do que o sistema esparso original. Obviamente, a utilização deste método fica restringida a situações onde a dimensão do problema de interface não exceda as capacidades computacionais do *Master*.

6.3.2 Método de subestruturação recursiva

O método de subestruturação recursiva foi implementado [130] com o intuito de colmatar as limitações reveladas pelo método anterior, tornando assim possível a resolução de problemas de maior dimensão. A estratégia subjacente a este método consiste em decompor o sistema representativo do problema de interface numa sucessão de sistemas de menor dimensão, através da condensação progressiva dos seus graus de liberdade. Esta condensação processa-se recorrendo à formação do sistema complementar de Schur (6.5), analogamente ao método precedente. Deste modo, esta estratégia pode ser observada como uma generalização do método de subestruturação.

Como ponto de partida, procede-se ao agrupamento de todos os graus de liberdade da interface, \mathbf{q}_F . Cada grupo é composto por incógnitas associadas a nós que partilham os mesmos sub-domínios. Considera-se que cada um dos grupos assim formados constituem uma fronteira distinta. Neste contexto, cada sub-domínio pode ser considerado como um macro-elemento finito, delimitado pelas fronteiras anteriormente referidas.

De modo a ilustrar o método descrito nesta secção, representa-se na Figura 6.3(a) o exemplo de um problema com uma partição de 4 sub-domínios, identificados por numerais romanos. Seguindo a definição acima estabelecida para as fronteiras da interface, a partição adoptada origina um total de 7 fronteiras distintas (identificadas por algarismos arábicos), a saber, as fronteiras formadas pelos nós que partilham os sub-domínios: $\{I, II\}$, $\{I, III\}$, $\{I, IV\}$, $\{II, III\}$, $\{III, IV\}$, $\{I, II, III\}$ e $\{I, III, IV\}$.

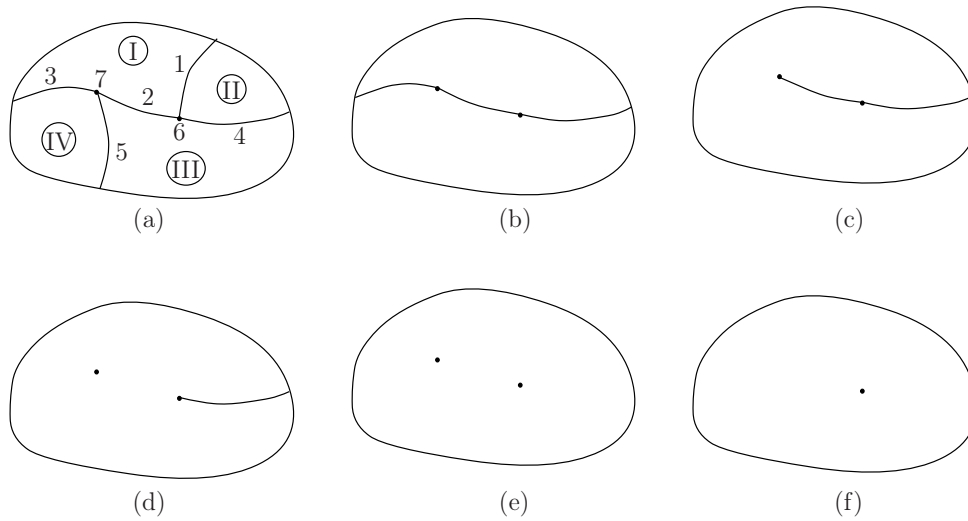


Figura 6.3: Ilustração da condensação progressiva dos graus de liberdade da interface

Uma vez agrupados os graus de liberdade pelas respectivas fronteiras, procede-se à eliminação progressiva das fronteiras existentes, que corresponde à condensação dos respectivos graus de liberdade nas sucessivas matrizes de interface. Esta acção provoca, conseqüentemente, a fusão entre os macro-elementos existentes até resultar num único macro-elemento abrangendo todo o domínio, conforme é ilustrado na evolução das Figuras 6.3(a-c). A eliminação de uma fronteira realiza-se por forma a juntar dois macro-elementos adjacentes, podendo proceder-se à eliminação simultânea de fronteiras distintas, desde que estas não delimitem os mesmos macro-elementos, como é representado na passagem das Figuras 6.3(a-b). Esta eliminação simultânea de fronteiras confere uma característica multifrontal [38] ao algoritmo. O processo de eliminação das fronteiras só é dado por concluído quando restar apenas uma única fronteira, Figura 6.3(f).

O algoritmo, tal como foi implementado, contempla apenas uma estratégia expedita para o faseamento de eliminação das fronteiras. Assim, a fronteira escolhida para eliminar é aquela que, entre as que ainda não foram eliminadas, reúne o maior número de graus de liberdade. Esta é, porventura, a principal limitação deste algoritmo, conforme se constatará no decurso desta secção. Adicionalmente, é ainda determinado se existem outras fronteiras que possam ser eliminadas simultaneamente com a fronteira escolhida, de acordo com a regra acima estabelecida. O *Master*, na etapa preparatória da resolução do problema de interface efectua a factorização simbólica das sucessivas matrizes. É nesta etapa que o *Master* procede à determinação da or-

dem da eliminação das fronteiras, comunicando-a aos *Slaves*. A título de exemplo, a Figura 6.4(a) mostra o grafo de eliminação de fronteiras correspondente ao exemplo da Figura 6.3.

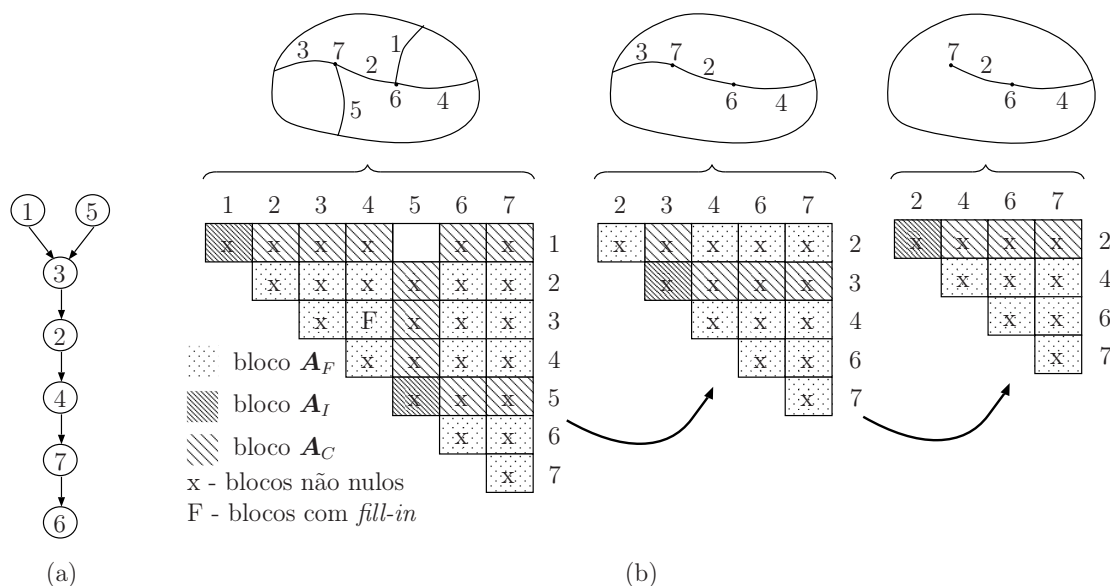


Figura 6.4: Grafo de eliminação de fronteiras e ilustração do método de subestruturação recursiva

No decorrer do processo de condensação sucessiva poderão existir blocos nulos que são preenchidos, fenómeno denominado por *fill-in*. Estas ocorrências são também determinadas pelo *Master* durante a factorização simbólica. Por sua vez, a etapa de factorização numérica é realizada exclusivamente pelos *Slaves*, mediante a informação, decorrente da factorização simbólica, fornecida pelo *Master*. As operações desta fase entre os diversos blocos envolvem o produto matriz-matriz e a inversão de matrizes densas, tendo sido utilizadas para o efeito rotinas optimizadas das bibliotecas numéricas BLAS [14] e LAPACK [8]. Na Figura 6.4(b) representam-se os passos iniciais da eliminação das fronteiras através do método da subestruturação recursiva.

Como se depreende da descrição fornecida, a implementação do código em paralelo do algoritmo baseado no presente método é significativamente mais complexa do que aquela requerida para o método da subestruturação.

Para concluir, menciona-se que nas referências [65], [66] e [67] é apresentado um algoritmo paralelo de resolução directa de sistemas de equações de alto desempenho. Embora o método descrito nesta secção tenha sido desenvolvido de forma totalmente

independente e desconhecendo os trabalhos anteriormente citados, constatou-se posteriormente que os mesmos se baseiam em princípios análogos: a aplicação recursiva do método de subestruturação ao problema de interface. Considerou-se por isso, indispensável a citação dos referidos trabalhos. Identificam-se de seguida as diferenças mais relevantes entre o algoritmo aqui proposto e o algoritmo supracitado, diferenças essas que permitem a atribuição a este último da classificação de *alto desempenho* por parte dos seus autores [66], [67].

A análise comparativa do método de implementação de ambos os algoritmos revela que, de todas as diferenças encontradas, aquela que poderá justificar uma eventual discrepância no desempenho é a estratégia delineada para o faseamento da eliminação das fronteiras. Esta estratégia encontra-se também associada à definição da distribuição de tarefas atribuídas a cada processador, visando obter a máxima ocupação simultânea dos processadores e impondo um padrão de comunicações inter-processadores que reduza a sua interacção. Efectivamente, a estratégia encontrada nos trabalhos mencionados é mais elaborada do que a aqui proposta, baseando-se a primeira no algoritmo desenvolvido por Gupta *et al.* [52]. O padrão de comunicações e o faseamento da eliminação de fronteiras com o referido algoritmo é ilustrado na Figura 6.5 para um exemplo com uma partição de 16 sub-domínios. Para a utilização deste último é forçoso que o número de sub-domínios, n_{SD} , possa ser expresso por uma potência de base dois,

$$n_{SD} = 2^p, \quad p \in \mathbb{N}^+ \quad (6.8)$$

A opinião expressa em [67] enfatizando a complexidade e a necessidade de uma implementação cuidadosa da operação de junção de subdomínios para garantir uma boa *escalabilidade*, aquando da resolução de sistemas de grandes dimensões e/ou com um elevado número de subdomínios, reforça o comentário anterior. Adicionalmente, os mesmos autores reportam ainda que numa fase inicial do desenvolvimento do seu algoritmo [68], não tendo recorrido ao método de Gupta *et al.* [52], o desempenho foi significativamente menos satisfatório quando comparado com o do algoritmo desenvolvido posteriormente, no qual este último foi contemplado.

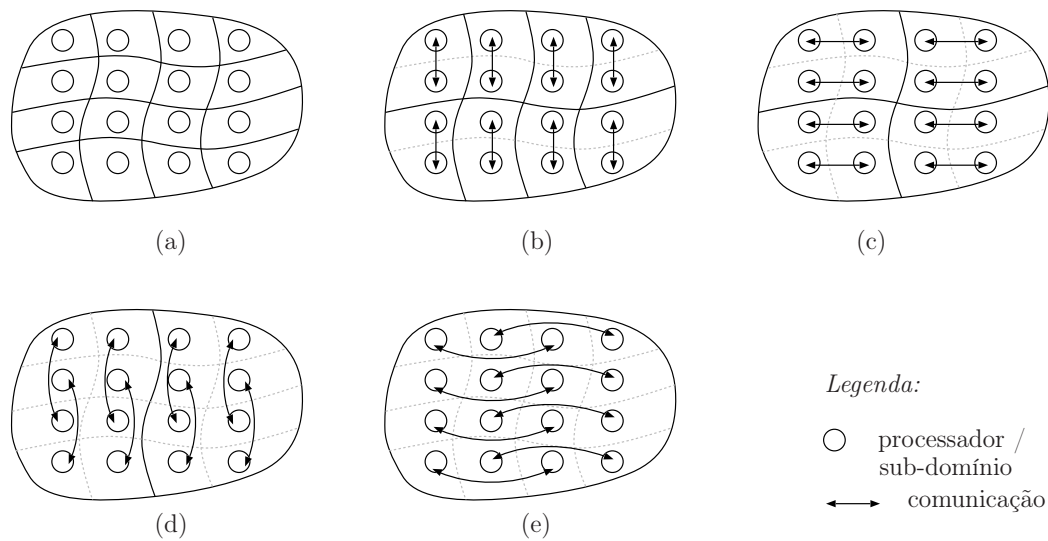


Figura 6.5: Padrão de comunicações e o faseamento da eliminação de fronteiras com o método de Gupta *et al.* [52]

6.3.3 Algoritmo PSPASES

No seguimento da secção anterior, e por forma a otimizar a implementação paralela do modelo proposto, torna-se patente a necessidade de dispor de um algoritmo de *alto desempenho* para a resolução de sistemas de equações em paralelo.

A sofisticação inerente ao desenvolvimento do mesmo implica um trabalho árduo e moroso. Tendo em consideração o estado da arte dos *softwares* já disponíveis para o efeito [5], [62], [75], [113], optou-se por tirar partido destes com a sua inclusão no código desenvolvido neste trabalho, em detrimento da concepção de um novo.

A pesquisa do *software* a adoptar resultou na escolha do código denominado PSPASES (o acrónimo de **P**arallel **SP**arse **S**ymmetric **dirE**ct **S**olver) [62]. As principais razões para esta escolha relacionam-se com o facto de consistir num *software* de código aberto, desenvolvido em linguagem C e Fortran e utilizando a interface MPI, as mesmas utilizadas no código em desenvolvimento. Mais ainda, a fácil transposição dos dados entre os formatos requeridos por ambos os códigos, permite a sua fácil inclusão no código já existente.

O algoritmo paralelo do PSPASES baseia-se na resolução directa do sistema de equações (6.2) através de uma decomposição de Choleski; por conseguinte, e ao contrário dos restantes métodos, a matriz inicial é factorizada como um todo [51],

não sendo, conseqüentemente, englobado na classe dos métodos de decomposição de domínio.

Para a factorização da matriz do sistema, o algoritmo é estruturado em três etapas sucessivas, correspondentes a três rotinas distintas: (i) reordenação da matriz de modo a reduzir o aparecimento de novos termos não nulos na matriz factorizada, (ii) factorização simbólica e (iii) factorização numérica. Uma última rotina complementar procede à obtenção da solução através da usual operação de substituição directa, seguida de retrosubstituição.

Para recorrer às rotinas do código PSPASES é necessário que a matriz, A , do sistema (6.2) seja particionada em blocos de linhas consecutivas, sendo cada um destes blocos armazenado por um processador distinto. Adicionalmente, o número de blocos tem de corresponder ao número total de processadores envolvidos na resolução do sistema (os *Slaves*), sendo imprescindível que este número possa ser expresso por uma potência de base dois, à semelhança da condição (6.8). O armazenamento de cada bloco é realizado de uma forma compacta através do formato CRS (*Compressed Row Storage*) não tirando partido da simetria da matriz [62]. De modo análogo, o vector do termo independente, \mathbf{R} , é também ele particionado por conjuntos de linhas e distribuído pelos diversos *Slaves*.

Conforme referido anteriormente, a utilização do algoritmo *PSPASES* é combinada com a utilização de uma partição de domínio com sobreposição de elementos, ilustrada na Figura 6.1(b). A vantagem desta abordagem reflecte-se na capacidade de proceder à montagem, partição por linhas e armazenamento do sistema governativo, sem a necessidade de se efectuarem comunicações entre os diversos processadores.

6.3.4 Método FETI

O método FETI, actualmente também denominado por one-level FETI, surgiu no início da década de 90 [39], [44]. Trata-se de um método de decomposição de domínio híbrido uma vez que combina, na resolução do sistema (6.2), a utilização de um método de resolução directo com um iterativo. Este era também inovador, na altura do seu aparecimento, quanto ao modo como processa a condensação dos graus de liberdade locais dos sub-domínios.

O grande interesse suscitado por este método é bem patente no elevado número de

publicações científicas versando este assunto, registadas nos últimos anos, bem como no aparecimento de diversas variantes desenvolvidas com base no método original, nomeadamente e a título de exemplo: o (algebraic) A-FETI [108], o two-level FETI [40],[43], o FETI-DP (dual-primal) [42] e o (total) T-FETI [36].

A presente descrição do método FETI é efectuada com base na sua versão original (one-level FETI), e assenta em princípios de programação matemática, à semelhança da abordagem adoptada para a dedução do modelo proposto.

Tenha-se em consideração que a matriz, \mathbf{A} , do sistema de equações (6.2) é definida positiva. Atendendo a este facto, o mesmo sistema de equações traduz as condições de optimalidade do seguinte problema de programação quadrática sem restrições,

$$\text{Min } \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{R} \quad (6.9)$$

Considere-se agora que o domínio se encontra particionado em n_{SD} sub-domínios. Nesta partição, admita-se uma redundância de nós com as mesmas coordenadas por forma a não existirem nós partilhados pelos mesmos sub-domínios, conforme ilustrado na Figura 6.6(b). Com base nos pressupostos anteriores, o problema (6.9) é reescrito da seguinte forma:

$$\text{Min } \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{R} \quad (6.10a)$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{B} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6.10b)$$

onde,

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n_{SD}} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{n_{SD}} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{n_{SD}} \end{bmatrix} \quad (6.11a-c)$$

em que os sub-vectores \mathbf{q}_i e \mathbf{R}_i e a sub-matriz \mathbf{A}_i agrupam as respectivas contribuições do sub-domínio i . A restrição (6.10b) estabelece a condição de compatibilidade nas fronteiras de sub-domínios adjacentes, através do operador “booleano”,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_{n_{SD}} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

A estrutura deste operador é constituída unicamente por valores 0 ou ± 1 , sendo que a sua definição não é única [125]. Em particular, no caso de nós na intersecção de mais de dois subdomínios (*e.g.* o nó n da Figura 6.6) existe a alternativa de impor a compatibilidade com ou sem redundância, resultando, respectivamente, e para o exemplo utilizado, nas definições alternativas (6.13a) e (6.13b). Já no caso de nós partilhados apenas por dois subdomínios (*e.g.* o nó m da Figura 6.6), as alternativas são apenas duas, sendo estas simétricas entre elas.

Neste trabalho, optou-se pela utilização de um operador não redundante, sendo que esta opção conduz a um problema de interface de menores dimensões. Contudo, a alternativa de utilizar um operador redundante pode por vezes acelerar a convergência do método FETI[108], encontrando-se uma explicação para este facto em [107].

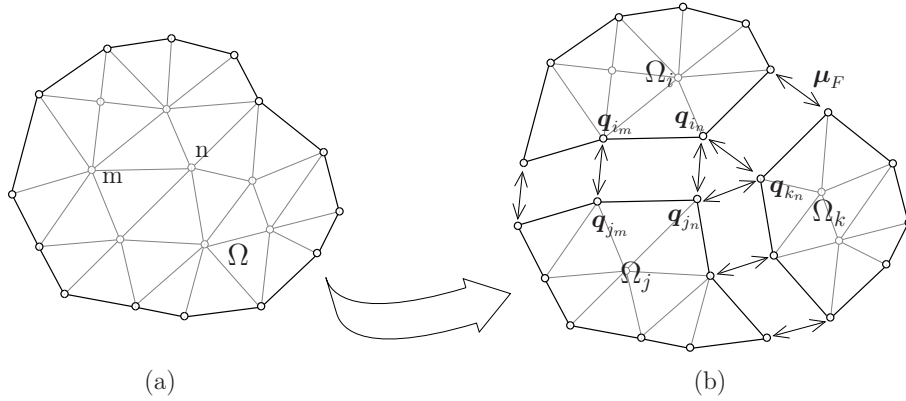


Figura 6.6: Partição do domínio pelo método FETI

$$\mathcal{B}_{\{m,n\}} \mathbf{q}_{\{m,n\}} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{i_m} \\ \mathbf{q}_{i_n} \\ \mathbf{q}_{j_m} \\ \mathbf{q}_{j_n} \\ \mathbf{q}_{k_n} \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.13a)$$

$$\mathcal{B}_{\{m,n\}} \mathbf{q}_{\{m,n\}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{i_m} \\ \mathbf{q}_{i_n} \\ \mathbf{q}_{j_m} \\ \mathbf{q}_{j_n} \\ \mathbf{q}_{k_n} \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.13b)$$

Introduzindo agora a restrição de compatibilidade (6.10b) na função objectivo (6.10a), através dos multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\mu}_F$, resulta a seguinte função Lagrangeana,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}_F) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{R} + \boldsymbol{\mu}_F^T \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (6.14)$$

cuja minimização conduz a um problema de ponto sela, equivalente ao sistema de equações (6.2),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\mu}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Da primeira equação do sistema (6.15), tem-se para cada subdomínio:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\mu}_F \quad (6.16)$$

Observe-se que a equação (6.16) só tem solução no caso de se verificar que o termo independente, $(\mathbf{R}_i - \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\mu}_F)$, é dado por uma combinação linear das colunas da sub-matriz, \mathbf{A}_i . Dito de outro modo, o termo independente não pode ter nenhuma componente no espaço nulo, $\mathcal{N}(\mathbf{A}_i)$, da sub-matriz, \mathbf{A}_i ,

$$(\mathbf{R}_i - \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\mu}_F) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}_i) \quad (6.17)$$

Desta condição resulta ainda que,

$$\mathcal{R}_i^T (\mathbf{R}_i - \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\mu}_F) = 0 \quad (6.18)$$

onde a sub-matriz, \mathcal{R}_i , agrupa os elementos de uma base do espaço nulo, $\mathcal{N}(\mathbf{A}_i)$.

Repare-se agora que a solução da equação (6.16), em relação às variáveis primais \mathbf{q} , pode ser escrita da seguinte forma,

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{A}_i^+ (\mathbf{R}_i - \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\mu}_F) + \mathcal{R}_i \boldsymbol{\alpha}_i \quad (6.19)$$

sendo que a sub-matriz, \mathbf{A}_i^+ simboliza a pseudo-inversa [106] de \mathbf{A}_i , definida por²,

$$\mathbf{A}_i \mathbf{A}_i^+ \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i \quad (6.20)$$

²Esta definição não garante uma unicidade para expressão da matriz pseudo-inversa. Todavia, este facto é irrelevante para a utilização do presente método.

Com efeito, no caso particular em que a sub-matriz \mathbf{A}_i é não-singular, a pseudo-inversa é por definição a matriz inversa, $\mathbf{A}_i^+ = \mathbf{A}_i^{-1}$, e a base do espaço nulo, \mathbf{R}_i , resulta no vector nulo. Na expressão (6.19), o vector $\boldsymbol{\alpha}_i$ representa uma incógnita adicional para o problema, definindo uma combinação linear das colunas de \mathcal{R}_i .

Da combinação de (6.15), (6.18) e (6.19) resulta, por fim, o problema da interface do método FETI,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_I & -\mathbf{G}_I \\ -\mathbf{G}_I^T & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\mu}_F \\ \boldsymbol{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_I \\ -\mathbf{e} \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

onde,

$$\mathbf{F}_I = \sum_{i=1}^{n_{SD}} \mathcal{B} \mathbf{A}^+ \mathcal{B}^T \quad (6.22a)$$

$$\mathbf{G}_I = [\mathcal{B}_1 \mathcal{R}_1 \cdots \mathcal{B}_{n_{SDF}} \mathcal{R}_{n_{SDF}}] \quad (6.22b)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_1 \cdots \boldsymbol{\alpha}_{n_{SDF}}]^T \quad (6.22c)$$

$$\mathbf{d}_I = \sum_{i=1}^{n_{SD}} \mathcal{B} \mathbf{A}^+ \mathbf{R} \quad (6.22d)$$

$$\mathbf{e} = [\mathbf{R}^T \mathcal{R}_1 \cdots \mathbf{R}^T \mathcal{R}_{n_{SDF}}]^T \quad (6.22e)$$

Nas definições de (6.22), n_{SDF} representa o número de sub-domínios nos quais a respectiva sub-matriz \mathbf{A}_i é singular ($n_{SDF} < n_{SD}$). Estes sub-domínios são usualmente denominados de *flutuantes*.

O cálculo explícito da matriz \mathbf{F}_I representa um esforço computacional considerável, tornando impraticável a sua montagem e por conseguinte a aplicação de um método directo para a resolução de (6.21). Dever-se-á optar, deste modo, por um método iterativo. O método do Gradiente Conjugado é um destes métodos iterativos de resolução, cuja utilização se encontra muito difundida por ser considerado, para a classe de matrizes simétricas e definidas positivas, um dos melhores [109]. Contudo, no presente caso, a aplicação imediata do método do Gradiente Conjugado revela-se inadequada porquanto a matriz do sistema (6.21) é indefinida. Esta limitação é contornada impondo *a priori* o cumprimento da condição de equilíbrio (6.18). Para tal, $\boldsymbol{\mu}_F$, é expresso do seguinte modo:

$$\boldsymbol{\mu}_F = \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\mu}}_F \quad (6.23)$$

considerando,

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{G}_I (\mathbf{G}_I^T \mathbf{G}_I)^{-1} \mathbf{e} \quad (6.24a)$$

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{G}_I (\mathbf{G}_I^T \mathbf{G}_I)^{-1} \mathbf{G}_I^T \right) \quad (6.24b)$$

Nas definições anteriores, \mathbf{I} representa a matriz identidade, e $\bar{\boldsymbol{\mu}}_F$ é uma nova incógnita.

Atendendo a que

$$\mathbf{G}_I^T \mathbf{P} = 0 \quad (6.25)$$

procede-se à pré-multiplicação da primeira equação do sistema (6.21) pela matriz \mathbf{P}^T e introduz-se a definição (6.23). O resultado é um derradeiro sistema de equações, cuja matriz é semi-definida positiva e, por conseguinte, adequada para a aplicação do método do Gradiente Conjugado,

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}_I \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\mu}}_F = \mathbf{P}^T (\mathbf{d}_I - \mathbf{F}_I \boldsymbol{\mu}_0) \quad (6.26)$$

Uma vez conhecido o valor do vector, $\bar{\boldsymbol{\mu}}_F$, o valor das variáveis da interface podem ser calculados. Assim, o valor de $\boldsymbol{\mu}_F$ é determinado a partir da expressão (6.23), sendo o valor do vector $\boldsymbol{\alpha}$ obtido através da seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{G}_I^T \mathbf{G}_I)^{-1} \mathbf{G}_I^T (\mathbf{F}_I \bar{\boldsymbol{\mu}}_F - \mathbf{d}_I) \quad (6.27)$$

6.3.4.1 Interpretação do significado físico

A descrição do método FETI foi realizada recorrendo a uma fundamentação exclusivamente matemática, podendo ser, de um ponto de vista conceptual, utilizado na resolução de qualquer sistema de equações com as características de (6.2). Todavia, torna-se interessante efectuar uma interpretação do significado físico das grandezas envolvidas e de algumas das condições estabelecidas quando o FETI é aplicado à resolução do sistema governativo de um problema mecânico resultante do MEF.

Para proceder a esta análise, convém começar por tornar explícito que os multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\mu}_F$, representam, de um ponto de vista físico, os par acção-reacção das forças nodais de ligação entre dois sub-domínios adjacentes.

Analise-se agora o aspecto relacionado com a eventual singularidade de \mathbf{A}_i . Facilmente se constata que esta singularidade ocorre quando o sub-domínio i tem um número de condições de apoio deficiente, resultando numa sub-estrutura dita hipostática. Consequentemente, os vectores das colunas de \mathbf{R}_i , a base do espaço nulo, configuram os modos de corpo rígido relativamente ao i -ésimo sub-domínio. Estes podem ser no máximo 6, para o caso de problemas 3D: 3 translações e 3 rotações. Este facto serve também de justificação para a atribuição da denominação de *flutuantes* a estes sub-domínios.

Observe-se ainda que a condição (6.18) garante que a distribuição de forças nodais em questão, $(\mathbf{R}_i - \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\mu}_F)$, é auto-equilibrada, ao impor que as forças não produzam trabalho sobre um campo de deslocamentos de corpo rígido. Efectivamente, esta condição é equivalente a garantir que o somatório de forças e de momentos num qualquer ponto é sempre nulo, sendo esta, como é de conhecimento geral, uma condição indispensável para a existência de uma solução estática equilibrada.

Por fim, refere-se que o sistema de equações (6.21) pode ser interpretado como o dual do problema complementar de Schur (6.5), correspondente ao problema de interface resultante do método de subestruturação. Com efeito, o problema de interface do método FETI estabelece uma relação de compatibilidade entre as forças aplicadas, $\boldsymbol{\mu}_F$, e os deslocamentos ocorridos (termo da direita),

$$\mathbf{F}_I \boldsymbol{\mu}_F = \mathbf{d}_I + \mathbf{G}_I \boldsymbol{\alpha} \quad (6.28)$$

6.3.4.2 Pormenores da implementação do método

São agora discutidos alguns detalhes da implementação do método FETI, realizada neste trabalho.

O primeiro aspecto abordado prende-se com a determinação da pseudo-inversa e das configurações de corpo rígido para os sub-domínios *flutuantes*. Este processo é realizado individualmente por cada *Slave*, para o respectivo sub-domínio. Para tal, o algoritmo de Cholesky é modificado [44] de modo a que, sempre que é encontrado um *pivot* nulo durante a factorização, suponhamos, na coluna n :

- i. é adicionada, a uma matriz de termos independentes auxiliar, uma nova coluna composta pelos os valores, $[-A_{i\ 1,n}, \dots, -A_{i\ n-1,n}, 1, 0, \dots, 0]^T$;

- ii. todos os termos da linha e da coluna, n , são substituídos pelo valor 0;
- iii. a entrada do pivot nulo, $A_{i,n,n}$, é substituída pelo valor 1;
- iv. prossegue-se com processo de factorização habitual.

A utilização da factorização descrita conduz à solução da matriz pseudo-inversa. Por sua vez, o número de *pivots* nulos identificados corresponde ao número de movimentos de corpo rígido possíveis. A sub-matriz \mathcal{R}_i é obtida através da aplicação do habitual processo de substituição directa combinado com retrosubstituição ao termo independente auxiliar. Salienta-se que o custo computacional destas operações é praticamente equivalente ao da factorização de uma matriz não-singular. Embora bastante expedito e computacionalmente pouco oneroso, o procedimento descrito revela, todavia, ter um ponto muito vulnerável [41]: a dificuldade de estabelecer uma tolerância que estipule um *zero numérico* para identificar os *pivots* nulos. Para contornar esta limitação, Dostal *et al.* [36] sugerem uma variante denominada T-FETI, na qual todos os sub-domínios são considerados como *flutuantes* sem quaisquer apoios exteriores. Esta medida obvia a necessidade de determinar numericamente o número e configuração dos modos dos movimentos de corpo rígido. No entanto, a implementação desta variante não foi testada neste trabalho.

No que respeita aos blocos da matriz do sistema governativo (6.21), nomeadamente, as matrizes \mathbf{F}_I e \mathbf{G}_I , estas não são calculadas explicitamente. Sempre que é necessário proceder a um produto matricial que as envolva, este é obtido através de produtos parciais com base na definição das suas expressões (6.22), o qual é realizado localmente pelos respectivos *Slaves*. Analogamente, as operações envolvendo a matriz booleana, \mathbf{B} , são realizadas através de uma rotina computacional com base na estrutura topológica dos dados, a qual permite saber quais são os sub-domínios que partilham um determinado nó.

No que respeita ao algoritmo do Gradiente Conjugado para a resolução do problema (6.26), a sua execução fica a cargo do processo *Master*, o qual incumbe os *Slaves* de procederem aos produtos matriciais necessários. A única excepção envolve a matriz $(\mathbf{G}_I^T \mathbf{G}_I)$. Os termos desta matriz são calculados explicitamente pelos *Slaves*, sendo por sua vez armazenados pelo *Master*, que procede à respectiva factorização.

Por último, refere-se que, com o objectivo de melhorar o desempenho global da implementação do modelo numérico, com base no método de FETI, estabelece-se

que, durante o processo iterativo de Uzawa, a resolução do sistema governativo global possa ser realizada de modo *inexacto*. Para tal, limita-se o número máximo das iterações realizadas pelo algoritmo do Gradiente Conjugado na resolução do problema (6.26). Este número é aferido com base numa percentagem (10 a 20%) das iterações necessárias para determinar, de modo exacto, o coeficiente β definido pela expressão (4.67b).

Capítulo 7

Aplicações Numéricas

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos numéricos demonstrativos do desempenho e das capacidades dos modelos desenvolvidos e a subsequente análise crítica dos resultados.

O primeiro problema estudado consiste numa chapa fina com um furo circular central submetida a carregamentos uni- e bi-axiais. Este é um exemplo clássico de validação que foi analisado por diversos autores recorrendo a diversas metodologias [45], [49], [53], [54], [77], [124]. Com base neste problema, foi realizado um conjunto de simulações utilizando diversas malhas, com os diferentes tipos de elementos propostos neste trabalho, de forma a analisar o comportamento do modelo e validar as soluções obtidas.

Ainda com o intuito de caracterizar o comportamento do modelo, segue-se a análise de problemas de capacidade de carga de fundações superficiais rígidas com diversas geometrias, designadamente, de forma circular, quadrada e rectangular. Este tipo de problemas apresenta uma dificuldade numérica apreciável originada pelos seus mecanismos de colapso complexos, com fortes singularidades na ligação entre a extremidade da sapata rígida e o solo. Paralelamente, a região de colapso tende a aumentar significativamente com o aumento do valor do ângulo de atrito do solo, ϕ , conduzindo à necessidade de utilizar, para estes casos, modelos de elementos finitos com grande extensão geométrica. Este facto é evidenciado para o caso das sapatas de geometria circular onde o aumento da capacidade de carga é correlacionado com o aumento do ângulo de atrito do solo, permitindo, desta forma, ilustrar

o comportamento do modelo quando aplicado a materiais friccionais em contraste com o dos materiais puramente coesivos. Todos os factos enunciados dificultam a obtenção de cargas de colapso precisas para este tipo de problemas. Esta classe de problemas é igualmente utilizada para avaliar o desempenho das implementações paralelas propostas.

Por último, recorre-se à ferramenta de cálculo desenvolvida para analisar a capacidade resistente de ligações de perfis metálicos tubulares. De acordo com Lee e Wilmshurst [73], o comportamento estrutural deste tipo de ligações, mesmo aquelas que apresentam uma configuração espacial simples, é complexo e de difícil análise. A validação das soluções numéricas obtidas realiza-se através do confronto com resultados de ensaios experimentais relatados por outros autores. A anteceder a apresentação destes exemplos, tecem-se algumas considerações sobre a adequabilidade da aplicação da Análise Limite na modelação deste tipo de ligações.

Todos os cálculos apresentados neste capítulo foram efectuados num *cluster* de quatro nós constituído por Servidores HP ProLiant. Três destas máquinas encontram-se equipadas com dois microprocessadores Intel Quad-Core Xeon L5335 e a quarta com dois Intel Quad-Core Xeon E5405; sendo ambos os modelos caracterizados por uma velocidade de relógio de 2.00GHz. Todas as máquinas possuem uma memória de 16Gb e duas placas de rede Ethernet de 1Gbit/s. Acrescente-se ainda que as máquinas se encontram interligadas através de uma rede gigabit dedicada. O ambiente do *cluster* é suportado pelo sistema operativo Linux (kernel 2.6.25).

7.1 Chapa com furo circular

Neste primeiro exemplo considerou-se uma chapa quadrada fina com um furo circular central, representada na Figura 7.1. Esta é constituída por um material regido pelo critério de cedência de von Mises e encontra-se traccionada nas faces laterais. Pretende-se determinar o valor da carga, p , correspondente à situação de colapso para três combinações de cargas distintas, definidas pelos coeficientes α de 1, $\frac{1}{2}$ e 0, respectivamente.

Atendendo às propriedades de simetria da estrutura e carregamento foi modelado apenas um quarto da placa.

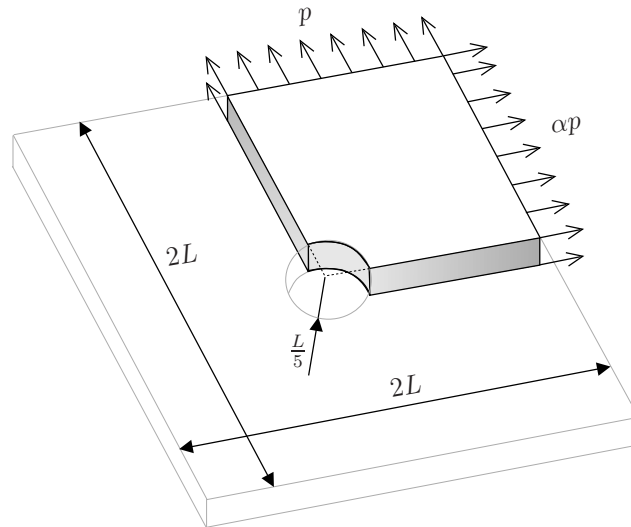


Figura 7.1: Chapa com furo circular

7.1.1 Análise com elementos 2D

As características acima enunciadas permitem considerar este como um problema de estados planos de tensão (EPT). Deste modo e numa primeira fase, foram utilizados elementos 2D para discretizar e analisar a estrutura. Para tal, consideraram-se 4 malhas distintas, representadas na Figura 7.2, tendo estas, como denominador comum, um número de graus de liberdade (NGL) semelhante, para as variáveis globais. As Malhas 1 e 2 foram geradas recorrendo ao arranjo de elementos descrito na secção 4.2.3.2, onde cada conjunto de 4 triângulos forma um quadrilátero, sendo as Malhas 3 e 4 não estruturadas. Na Tabela 7.1 encontram-se discriminadas as principais características das diferentes malhas utilizadas, designadamente, o tipo e número de elementos associado a cada malha, bem como o número de graus de liberdade globais e locais correspondentes. Nesta tabela é ainda apresentada, de modo adimensional, o valor obtido para a carga de colapso, p_u , para as três combinações de carga analisadas.

A análise dos valores obtidos evidencia que as diferentes malhas produzem resultados muito semelhantes, revelando, conforme seria de esperar numa análise EPT uma ausência de fenómenos de *locking*. Além disso, fica também patente nos resultados a boa capacidade do modelo para obter bons mecanismo de colapso, independentemente da orientação dos elementos na malha.

Por forma a aferir a qualidade dos resultados obtidos, são apresentados na Tabela 7.2

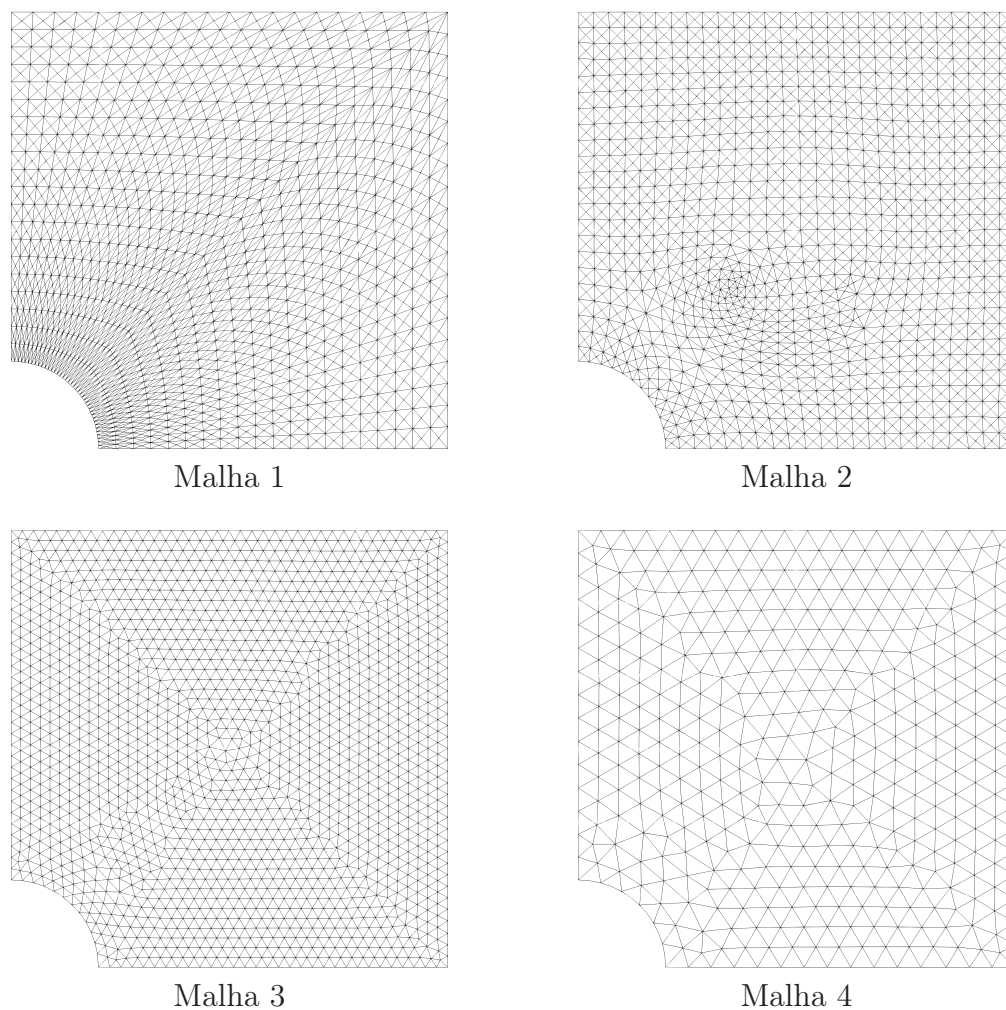


Figura 7.2: Discretização da chapa com furo circular com elementos 2D

Tabela 7.1: Análise 2D da chapa com furo circular: características das malhas e cargas de colapso (p_u)

Malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL		$p_u/(\sqrt{3k})$		
			globais	locais	$\alpha = 1$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 0$
1	linear	3200	3280	6400	0.898	0.914	0.803
2	linear	3136	3204	6272	0.898	0.916	0.806
3	linear	3208	3296	6416	0.898	0.915	0.808
4	quadrático	766	3152	4596	0.898	0.915	0.805

valores para a carga de colapso determinados por outros autores recorrendo a diferentes métodos. Na última linha desta tabela são ainda resumidos os valores das melhores aproximações para a carga de colapso, obtidas neste trabalho com elemen-

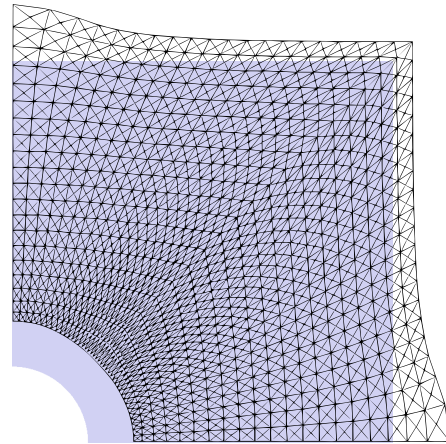
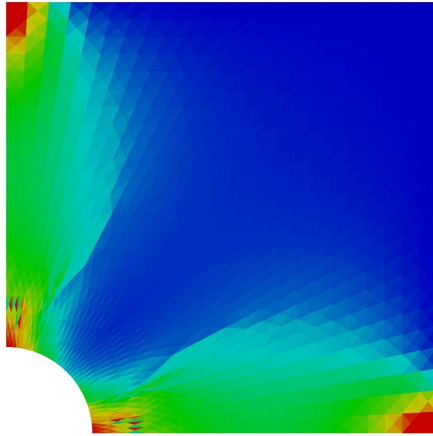
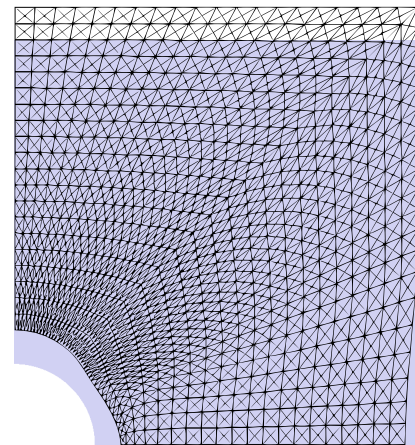
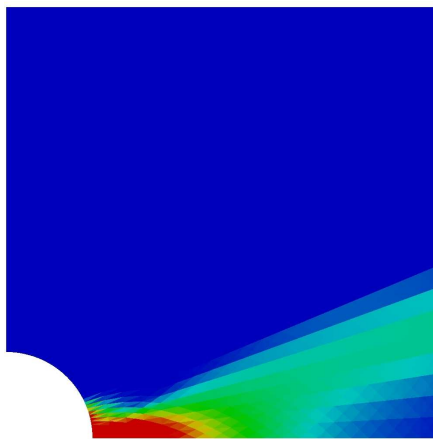
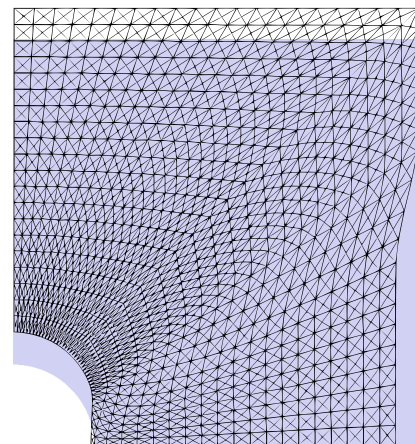
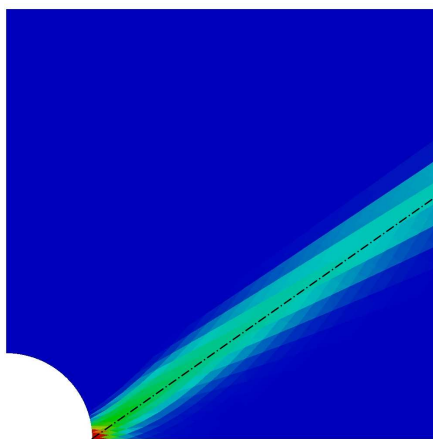
*Dissipação Plástica**Mecanismo de Colapso*Caso de carga $\alpha = 1$ Caso de carga $\alpha = \frac{1}{2}$ Caso de carga $\alpha = 0$ 

Figura 7.3: Resultados obtidos para a Malha 1

tos 2D. A confrontação dos diferentes resultados comprova a elevada precisão dos últimos, já que o erro entre a solução obtida e o único valor exacto conhecido (correspondente ao caso de $\alpha = 0$) não excede os 0.38%. Por sua vez, a comparação dos valores dos minorantes da carga de colapso com majorante determinado pela presente formulação apresenta uma boa concordância. Convém esclarecer que a razão pela qual os valores dos minorantes da carga de colapso apresentados por Liu *et al.* [77] nos casos de $\alpha \neq 0$ excedem os majorantes calculados deve-se ao facto do modelo utilizado por estes autores ser uma formulação fraca. De resto, um fenómeno análogo pode também ser observado nos valores de Tin-Loi e Ngo[124], onde a estimativa do limite inferior da carga de colapso para caso de $\alpha = 0$ excede o valor exacto.

Tabela 7.2: Cargas de colapso para o problema da chapa com furo circular obtidas por diferentes métodos

Métodos	Autores	$p_u/(\sqrt{3}k)$		
		$\alpha = 1$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 0$
Exacto	Gaydon & McCrum [45]	-	-	0.800
Incremental	INTES [54]	0.904	-	-
Limite inferior	Gaydon & McCrum [45]	0.894	-	-
	Groß-Weege [49]	0.882	0.891	0.782
	Tin-Loi & Ngo [124]	0.845	0.912	0.803
	Liu <i>et al.</i> [77]	0.903	0.915	0.795
Limite superior	Presente trabalho	0.898	0.914	0.803

Na Figura 7.3 estão representadas a distribuição da dissipação plástica nos elementos e a configuração do mecanismo de colapso obtido com a Malha 1, para os três casos de carga analisados. Adicionalmente e para $\alpha = 0$, é representada a tracejado a linha de rotura correspondente à solução exacta apresentada por Gaydon e McCrum [45], a qual forma com a direcção horizontal um ângulo de $\approx 35.26^\circ$. É notório observar que a distribuição da dissipação plástica obtida segue a mesma orientação da solução descontínua [45].

No que respeita aos tempos de execução dos cálculos 2D, pode-se afirmar que estes são poucos significativos, variando, em computação sequencial, entre 34s e 1m 39s.

7.1.2 Análise com elementos 3D

O mesmo problema é agora analisado através de elementos 3D. São considerados dois tipos de malhas distintos, representados na Figura 7.4. O primeiro tipo de malha, doravante denominado de bloco-estruturada, é constituído por uma malha base de elementos hexaédricos os quais são subdivididos em 24 tetraedros, conforme descrito na secção 4.2.3.2. O segundo consiste numa malha não estruturada. Grosso modo, procura-se que as malhas sejam constituídas por elementos de iguais dimensões, sendo considerados diferentes graus de refinamento dos elementos. As análises efectuadas utilizam não só elementos lineares mas também quadráticos, de forma a permitir a comparação do desempenho de ambos.

De modo a garantir a não singularidade da matriz do sistema governativo do problema de minimização global, foi impedido o deslocamento na direcção transversal à placa, num ponto arbitrário da malha.

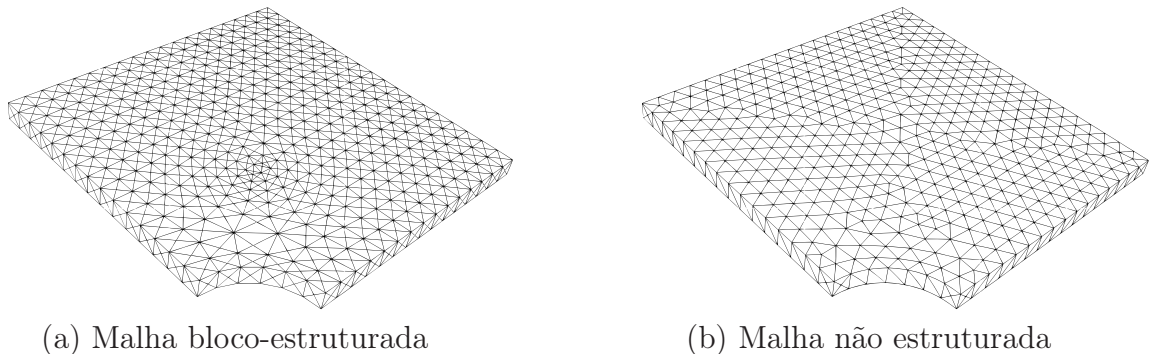


Figura 7.4: Tipos de malhas utilizadas na análise 3D

A Tabela 7.3 compila informação respeitante à utilização de elementos lineares. Para cada discretização é indicado o tipo de malha utilizado, o número total de elementos bem como o número de graus de liberdade a estes associados. São ainda apresentados os valores adimensionados das cargas de colapso, para os diferentes casos de carga estudados. As constatações que advêm da análise desta tabela são essencialmente duas: a relação directa entre o aumento do grau de refinamento das malhas e a qualidade dos resultados, e a supremacia das malhas bloco-estruturadas em detrimento das não estruturadas. Este último facto encontra justificação em problemas de *locking* resultantes da imposição da condição de normalidade do escoamento plástico no modelo numérico, conforme foi mencionado anteriormente. Assim, é possível constatar que a utilização de malhas bloco-estruturadas, embora

não permita oferecer garantias de eliminar o aparecimento de *locking*, releva uma boa capacidade de mitigar os seus efeitos, a julgar pela qualidade dos resultados.

Considera-se também importante realçar o elevado número de graus de liberdade habitualmente envolvidos numa análise. Efectivamente, e após comparação dos presentes resultados com os valores da Tabela 7.1, verifica-se que, para obter resultados de um grau de precisão análogo, foi necessário recorrer a mais de 17 e 30 vezes o número de graus de liberdade globais e locais, respectivamente, do que os utilizados na análise 2D.

Tabela 7.3: Resumo das análises para o problema da chapa com furo circular efectuadas com elementos lineares

Tipo de malha	Número de elementos	NGL		$p_u/(\sqrt{3k})$		
		globais	locais	$\alpha = 1$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 0$
bloco-estruturado	8400	7594	25200	0.902	0.926	0.838
bloco-estruturado	14400	12922	43200	0.900	0.924	0.825
bloco-estruturado	28200	25117	84600	0.898	0.920	0.811
bloco-estruturado	65856	58267	197568	0.898	0.916	0.809
não estruturado	7861	8010	23583	0.965	1.032	0.862
não estruturado	26266	26692	78798	0.960	0.998	0.841

Procede-se agora à análise do problema recorrendo a elementos quadráticos, encontrando-se sumariada na Tabela 7.4 a informação respeitante à caracterização das malhas e aos resultados obtidos. A disparidade notória dos valores de carga de colapso obtidos para ambos os tipos de malha, bem patente na Tabela 7.3, foi agora colmatada mediante a utilização destes novos elementos. Efectivamente, mesmo as malhas não estruturadas com elementos quadráticos conduzem agora a valores de carga de colapso de elevada precisão. A utilização de elementos quadráticos reveste-se, conseqüentemente, de particular importância a nível da minimização/eliminação de problemas de *locking*.

Nos gráficos das Figuras 7.5, 7.6 e 7.7 encontra-se representada a convergência das soluções em função tanto do número de graus de liberdade globais bem como dos locais, para os elementos lineares e quadráticos, justapondo-se informação contida nas Tabelas 7.3 e 7.4. Nestes gráficos são ainda representados os melhores limites inferiores conhecidos para a carga de colapso ou o valor da solução exacta, quando existente.

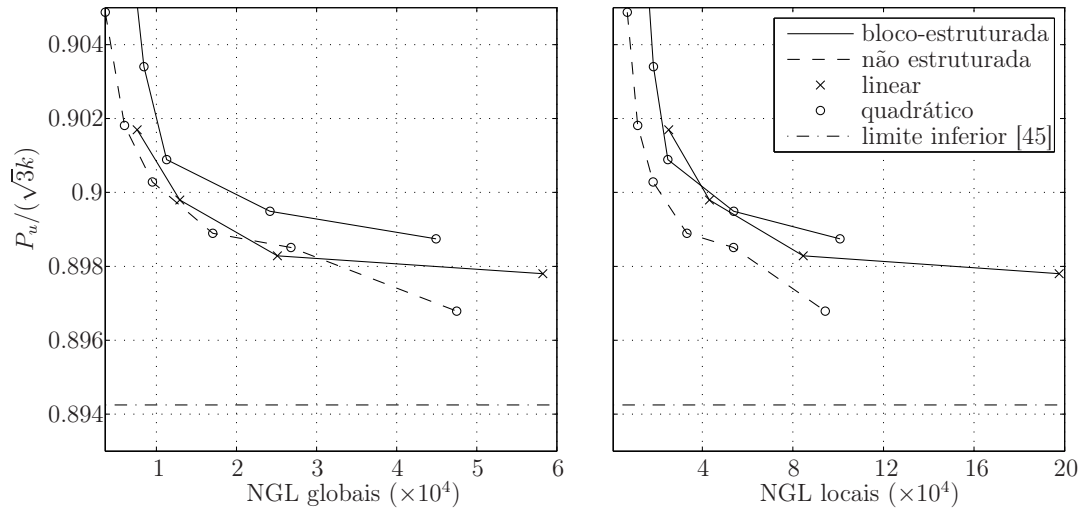
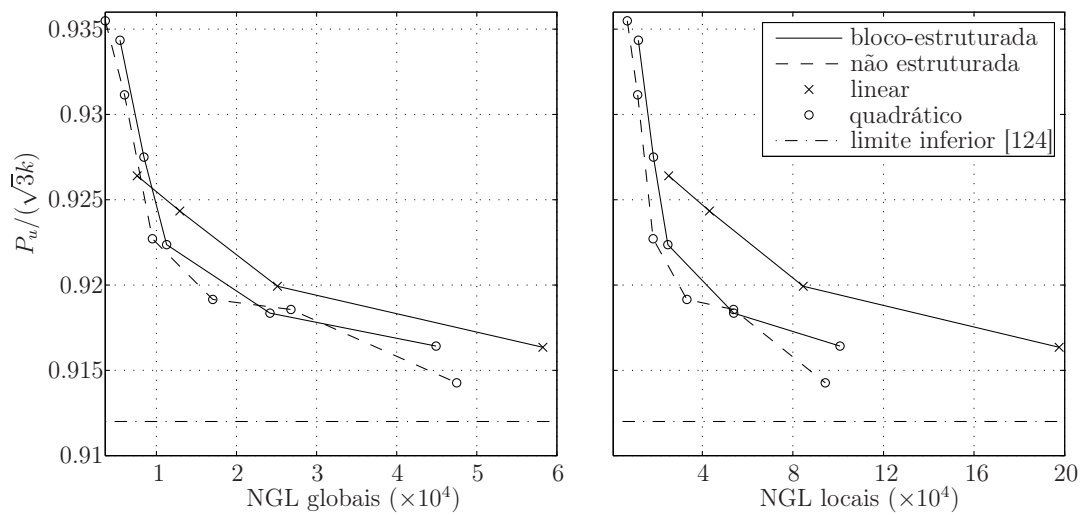
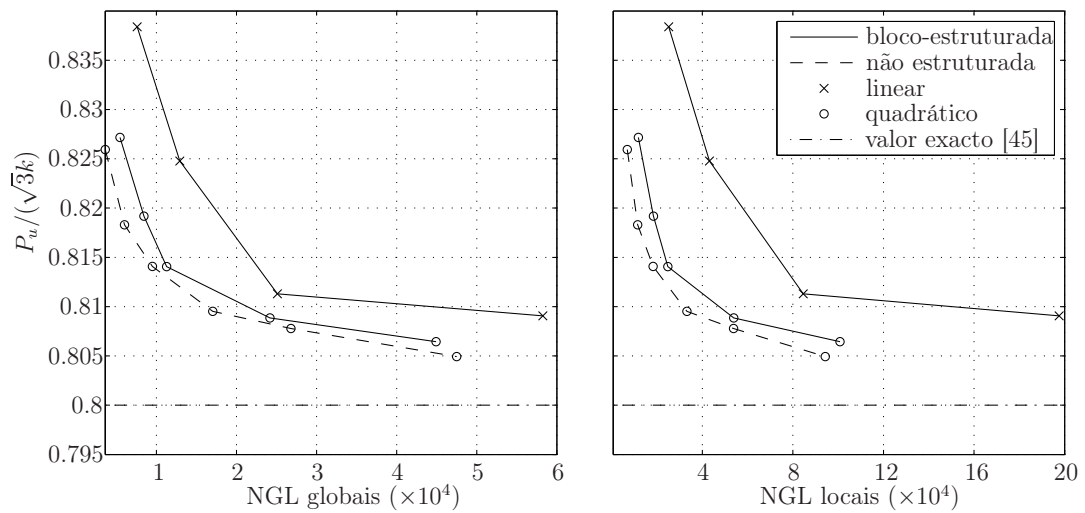
Figura 7.5: Resultados para o caso de carga $\alpha = 1$ Figura 7.6: Resultados para o caso de carga $\alpha = \frac{1}{2}$ Figura 7.7: Resultados para o caso de carga $\alpha = 0$

Tabela 7.4: Resumo das análises para o problema da chapa com furo circular efectuadas com elementos quadráticos

Tipo de malha	Número de elementos	NGL		$p_u/(\sqrt{3}k)$		
		globais	locais	$\alpha = 1$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 0$
bloco-estruturado	984	5458	11808	0.909	0.934	0.827
bloco-estruturado	1536	8436	18432	0.903	0.927	0.819
bloco-estruturado	2064	11278	24768	0.901	0.922	0.814
bloco-estruturado	4488	24184	53856	0.899	0.918	0.809
bloco-estruturado	8400	44912	100800	0.899	0.916	0.806
não estruturado	573	3619	6876	0.905	0.935	0.826
não estruturado	960	6004	11520	0.902	0.931	0.818
não estruturado	1526	9490	18312	0.900	0.923	0.814
não estruturado	2769	17023	33228	0.899	0.919	0.810
não estruturado	4484	26806	53808	0.899	0.919	0.808
não estruturado	7861	47488	94332	0.897	0.914	0.805

Esta representação permite observar, tal como seria de esperar, que o refinamento das malhas conduz a um melhoramento progressivo e consistente da solução. Constatou-se também que a taxa de convergência da solução em relação ao número de graus de liberdade do problema é mais acentuada para malhas menos refinadas, observando-se um decaimento gradual desta taxa à medida que aumenta a precisão da solução.

A análise comparativa das três malhas permite concluir que a malha não estruturada de elementos quadráticos é aquela que apresenta consistentemente os melhores resultados. Contudo, é de salientar que este comportamento é em grande medida influenciado pelo facto da geração das malhas bloco-estruturadas requererem um maior número de elementos ao longo da espessura da placa, como pode ser observado na Figura 7.4. Assim, esta discretização desnecessária de elementos na espessura torna-se penalizadora em termos dos graus de liberdade utilizados, pelo que, para o presente caso, a comparação entre o desempenho da utilização de malhas bloco-estruturadas e as não estruturadas torna-se inconclusiva. Entre as duas malhas bloco-estruturadas, a composta por elementos quadráticos tem, em regra geral, um desempenho mais favorável, exceptuando-se o caso da carga correspondente a $\alpha = 1$.

A representação gráfica do NGL locais em função do NGL globais, Figura 7.8, evidencia a maior proporção entre estes para o caso dos elementos lineares. Este facto

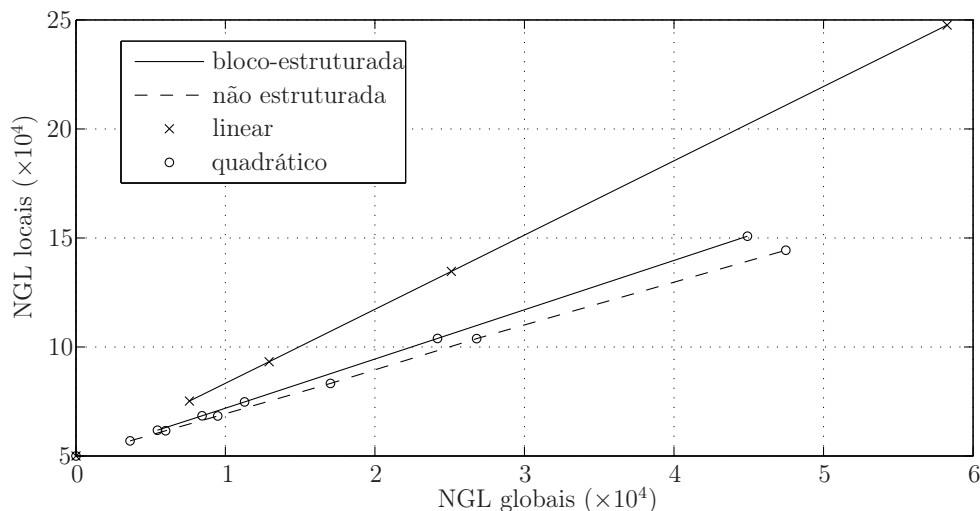
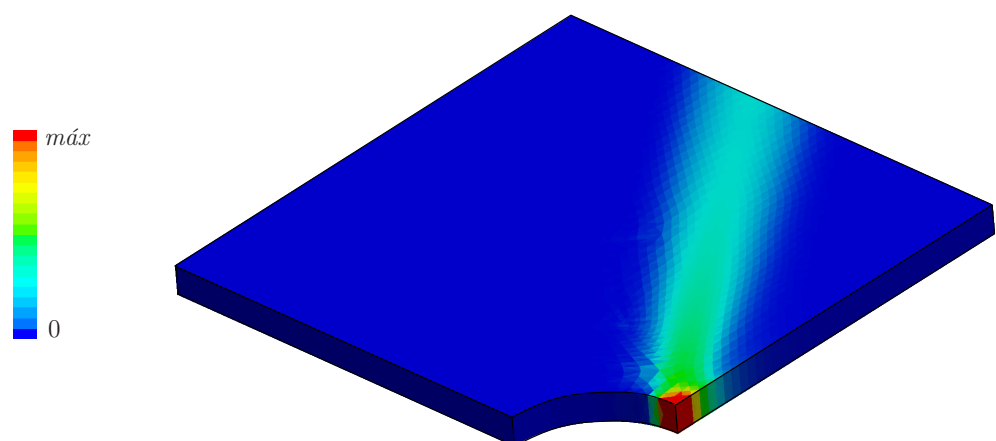


Figura 7.8: Relação entre os graus de liberdade globais e locais

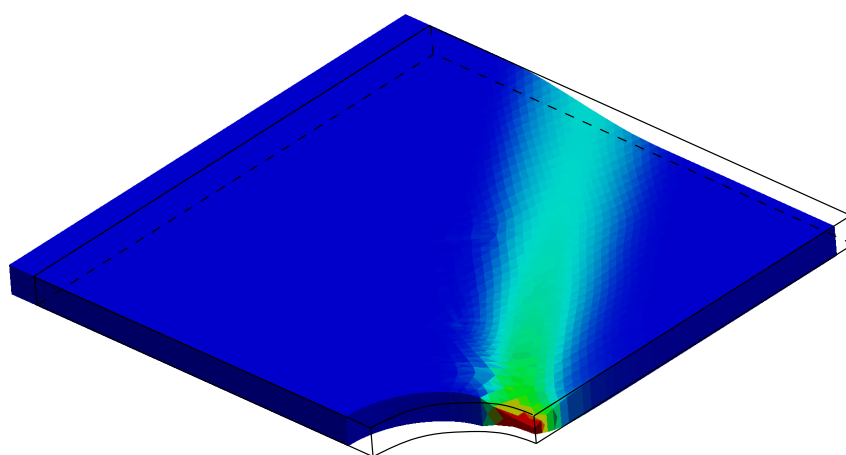
é relevante na medida em que a dimensão do sistema governativo global constitui, invariavelmente, o factor limitativo à execução dos cálculos devido ao consumo de memória utilizada para armazenar e executar a fase de factorização do sistema. Deste modo, é conveniente proporcionar o máximo de *riqueza* de informação local nos elementos com o menor custo possível de variáveis globais, sendo os elementos quadráticos aqueles que melhor cumprem este requisito.

Por forma a ilustrar as soluções obtidas através da análise 3D da placa, apresenta-se, na Figura 7.9, o padrão da distribuição da dissipação plástica e o respectivo mecanismo para o caso de carga correspondente ao parâmetro $\alpha = 0$. Estes resultam da análise com a malha mais refinada, não estruturada, de elementos quadráticos. É, desde logo, notória uma excelente concordância destes resultados com os apresentados anteriormente na Figura 7.3, provenientes da análise 2D. A análise 3D permite ainda observar no mecanismo de colapso (Figura 7.9-b) o efeito de redução na espessura da placa nas zonas onde a placa sofre um estiramento. Este fenómeno resulta das características isocóricas do escoamento plástico associadas ao critério de von Mises.

Na Tabela 7.5 reproduzem-se os tempos de cálculo registados para cada uma das malhas e para os diferentes casos de carga considerados. É interessante verificar que estes tempos são afectados, não só pelo número e tipo de elementos das discretizações, tal como seria espectável, mas também pelo carregamento. Efectivamente,



(a) Dissipação Plástica



(b) Mecanismo de Colapso

Figura 7.9: Solução 3D para o caso de carga $\alpha = 0$

verifica-se que o caso de carga correspondente a $\alpha = 1/2$, consome comparativamente aos restantes e de modo significativo, maior tempo de cálculo, seguido pelos casos de $\alpha = 0$ e 1, consecutivamente. Este facto ilustra bem que a velocidade de convergência não está dissociada do problema em estudo.

A conjugação da informação contida na Tabela 7.5 com os dados anteriores, possibilita a representação da evolução do valor estimado para a cargas de colapso em função do tempo de cálculo, conforme ilustrado nos gráficos das Figuras 7.10, 7.11 e 7.12. Destes advém que o desempenho, agora aferido pelo tempo de cálculo, é bastante equivalente para os diferentes tipos de malha, não se verificando, contrariamente ao observado em relação aos NGL, qualquer primazia por parte das malhas não estruturadas com elementos quadráticos, em relação às restantes.

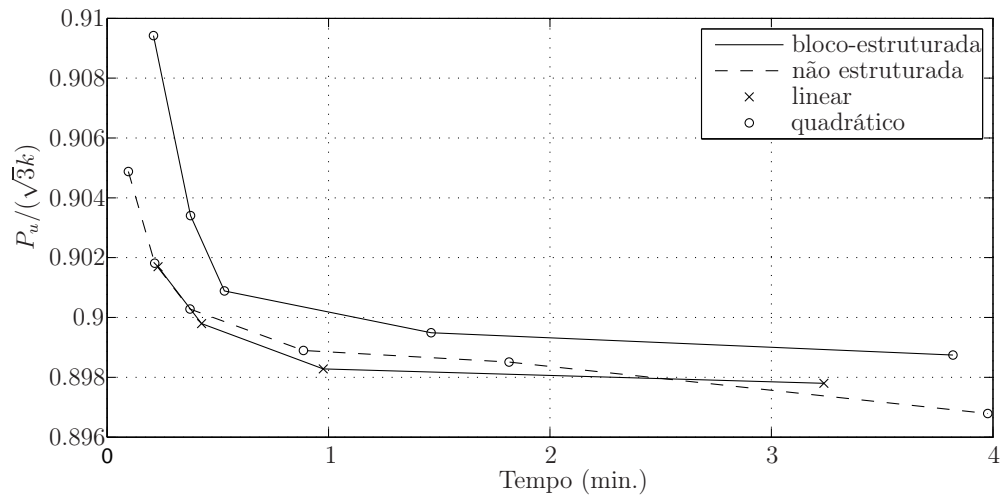


Figura 7.10: Evolução da carga de colapso com tempo de cálculo para $\alpha = 1$

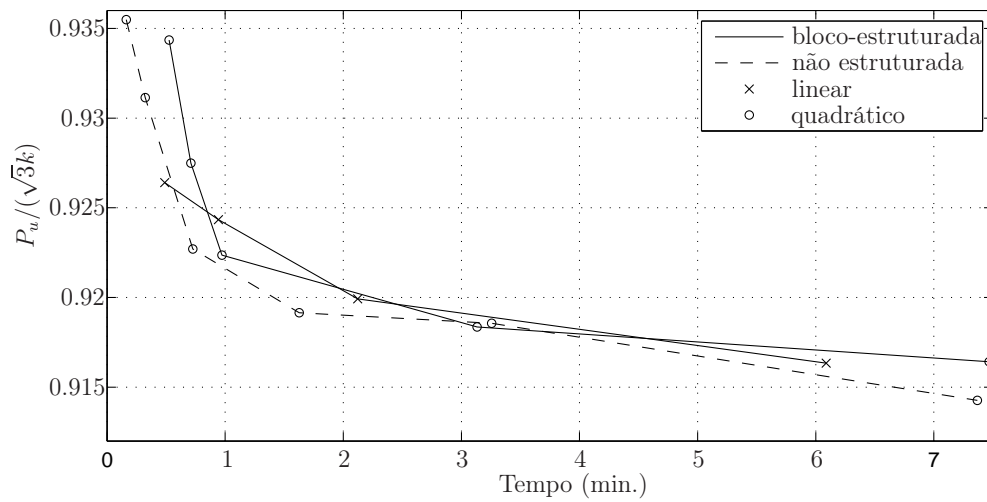


Figura 7.11: Evolução da carga de colapso com tempo de cálculo para $\alpha = \frac{1}{2}$

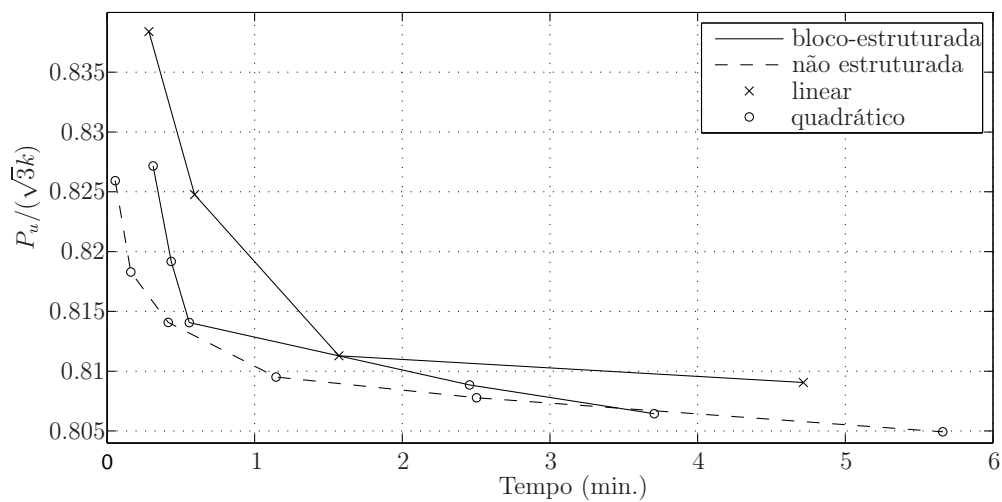


Figura 7.12: Evolução da carga de colapso com tempo de cálculo para $\alpha = 0$

Tabela 7.5: Tempos de cálculo das análise 3D

Tipo de malha	Tipo de elemento	Número de elementos	Tempo de cálculo		
			$\alpha = 1$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 0$
bloco-estruturado	linear	8400	13.8s	29.3s	17.0s
bloco-estruturado	linear	14400	25.6s	56.6s	35.6s
bloco-estruturado	linear	28200	58.6s	2m 07.3s	1m 34.2s
bloco-estruturado	linear	65856	3m 14.2s	6m 05.3s	4m 43.0s
bloco-estruturado	quadrático	984	12.6s	31.5s	18.7s
bloco-estruturado	quadrático	1536	22.6s	42.6s	26.1s
bloco-estruturado	quadrático	2064	31.8s	58.4s	33.4s
bloco-estruturado	quadrático	4488	1m 27.8s	3m 08.0s	2m 27.3s
bloco-estruturado	quadrático	8400	3m 49.2s	7m 28.1s	3m 42.4s
não estruturado	quadrático	573	5.8s	9.8s	3.3s
não estruturado	quadrático	960	12.9s	19.4s	9.66s
não estruturado	quadrático	1526	22.5s	43.6s	24.9s
não estruturado	quadrático	2769	53.2s	1m 37.6s	1m 08.7s
não estruturado	quadrático	4484	1m 48.9s	3m 15.4s	2m 30.2s
não estruturado	quadrático	7861	3m 58.6s	7m 22.1s	5m 39.6s

7.1.2.1 Descontinuidades

Com o objectivo de analisar o efeito da introdução de descontinuidades no modelo, são agora utilizadas 5 malhas distintas não estruturadas de elementos lineares. Nestas malhas base foram introduzidas descontinuidades em todas as fronteiras inter-elementares, através das duas estratégias abordadas neste trabalho (secção 4.4.3): (i) a aplicação da variante Híbrida/Mista da formulação; (ii) a utilização de elementos degenerados. Para cada uma das referidas estratégias eliminou-se a contribuição da deformação contínua dos elementos para a formação do mecanismo de colapso, transformando-os em elementos rígidos. Adicionalmente, previu-se a situação na qual a parcela da dissipação oriunda da deformação contínua dos elementos foi contabilizada simultaneamente com a parcela da dissipação das descontinuidades.

A Tabela 7.6 apresenta para cada uma das 5 malhas com as respectivas variantes acima enunciadas, a sua caracterização em termos de número de elementos finitos utilizados e de NGL. Ressalva-se que a contabilização do número de elementos finitos faz-se apenas considerando os elementos deformáveis, ou seja, aqueles que contribuem activamente para a solução. É ainda indicado, através da habitual forma

adimensional utilizada nesta secção, o valor da carga de colapso obtido.

Da análise da Tabela 7.6 salientam-se dois aspectos importantes. O primeiro prende-se com o aumento considerável de NGL que resulta da introdução indiscriminada de descontinuidades na discretização. Efectivamente, este aumento cifra-se, respectivamente, na ordem das 10 e 6 vezes em relação aos graus de liberdade globais e locais. Por outro lado, verifica-se que os resultados das soluções obtidas comparativamente aos resultados das soluções com campos de velocidades contínuos apresentadas na secção anterior, face aos NGL utilizados, são manifestamente de inferior qualidade. A justificação para este facto prende-se com a distribuição espacial dos elementos da malha (não estruturada); efectivamente, o imbricamento das faces não permite definir superfícies de escorregamento orientadas e com continuidade, de modo a formar um *bom* mecanismo de colapso. Esta mesma razão justifica as oscilações na convergência das soluções com o aumento do refinamento da malha quando se recorre a elementos rígidos. No caso da utilização de elementos deformáveis, este efeito não é em regra observado uma vez que é atenuado pela contribuição dos elementos com deformação contínua.

De modo a reforçar os comentários anteriores, foi construída uma malha de modo a que os elementos formassem uma superfície preferencial de escorregamento, orientada a 45° com um dos planos de simetria da estrutura, conforme representado na Figura 7.13(a). Esta malha é constituída por um total de 588 elementos de deformação contínua, número análogo ao da malha mais grosseira listada na Tabela 7.6. A análise efectuada com esta malha cinge-se apenas à situação de carregamento da placa traccionada uni-axialmente ($\alpha = 0$). Conforme expectável, a solução obtida recorrendo a descontinuidades modeladas quer através da formulação Híbrida/Mista quer utilizando elementos degenerados coincide, resultando um valor de colapso, $p_u/(\sqrt{3}k)$, igual a 0.9238. Este valor corresponde à solução analítica para o mecanismo de colapso baseado na superfície de escorregamento pré-definida. É relevante referir que a solução exacta obtido por [45], baseada numa linha de rotura orientada a $\approx 35.26^\circ$ já anteriormente representada a tracejado na Figura 7.3, não é passível de simulação exacta através das descontinuidades do modelo numérico. De facto, esta resulta de um fenómeno denominado de *necking* por Hill [57], resultante de uma localização da zona plastificada numa região de largura infimamente pequena, o qual permite que a direcção da velocidade relativa entre as duas superfícies não tenha de coincidir necessariamente com a orientação da superfície de rotura. Para

o caso particular da solução apresentada, o ângulo que a velocidade relativa e a linha de rotura formam é de $\approx 19.47^\circ$. Por sua vez, as descontinuidades do modelo contemplam apenas o escorregamento ao longo da superfície de rotura.

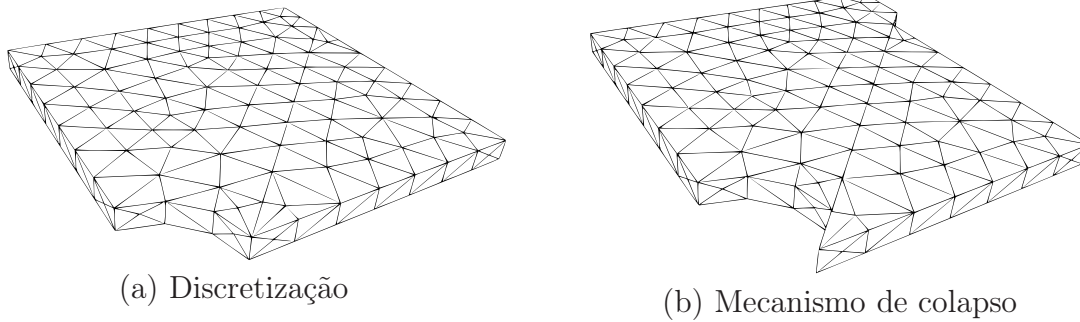


Figura 7.13: Placa com superfície de escorregamento orientada a 45°

A Figura 7.13(b) permite observar que a solução computacional conduz, efectivamente, a um mecanismo de colapso que mobiliza apenas as descontinuidades do referido plano.

Retomando a análise da Tabela 7.6, é possível ainda verificar que a utilização de descontinuidades, ao introduzir mais graus de liberdade às discretizações, contribui eficazmente para a eliminação de problemas de *locking*, mesmo em malhas não estruturadas com elementos lineares, as mais afectadas por este fenómeno. Para concluir a discussão dos resultados da Tabela 7.6, adverte-se para o facto da qualidade dos resultados utilizando elementos degenerados ser ligeiramente superior à dos obtidos com a variante Híbrida/Mista da formulação. Este facto resulta da majoração da dissipação plástica preconizada para materiais puramente coesivos durante a etapa de minimização local (secção 5.3.5.2). Note-se que, por este motivo, não seria observável qualquer diferença entre as soluções acaso da utilização de materiais friccionais. Adicionalmente, o facto desta discrepância ser pequena pode ser tomado como indicador de que a majoração adoptada é, efectivamente, eficaz.

Assim, e em jeito de resumo, a introdução arbitrária de descontinuidades conduz a um crescimento significativo, mas contudo algo ineficiente, do número de graus de liberdade do problema, repercutindo-se de forma penalizadora nos custos computacionais. Deste modo, advoga-se que a utilização de descontinuidades seja feita com parcimónia, devendo-se, em regra, introduzir este tipo de elementos apenas em regiões onde é previsível o aparecimento deste tipo de singularidades no campo das velocidades.

Tabela 7.6: Caracterização e resultados referentes às malhas com elementos de descontinuidade

Malha base	Tipo de elementos	Nr. Elementos (deformáveis)	NGL		$p_u/(\sqrt{3k})$		
			globais	locais	$\alpha = 1$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 0$
1	linear	573	638	1719	0.966	1.121	0.963
	rígido + HM	-	3438	8334	1.176	1.274	1.198
	linear HM	573	6650	10053	0.925	0.974	0.865
	rígido + degenerado	2778	3438	8334	1.175	1.275	1.196
	linear + degenerado	3351	6650	10053	0.924	0.973	0.864
2	linear	960	1047	2880	0.965	1.119	0.959
	rígido + HM	-	5760	14058	1.278	1.382	1.145
	linear HM	960	11250	16938	0.923	0.973	0.848
	rígido + degenerado	4686	5760	14058	1.278	1.372	1.144
	linear + degenerado	5646	11250	16938	0.922	0.970	0.848
3	linear	1526	1641	4578	0.944	1.086	0.935
	rígido + HM	-	9156	22410	1.095	1.111	1.082
	linear HM	1526	17972	26988	0.919	0.958	0.846
	rígido + degenerado	7470	9156	22410	1.094	1.111	1.081
	linear + degenerado	8996	17972	26988	0.915	0.940	0.843
4	linear	2769	2915	8307	0.957	1.096	0.909
	rígido + HM	-	16614	40968	1.175	1.267	1.101
	linear HM	2769	32796	49275	0.917	0.953	0.837
	rígido + degenerado	13656	16614	40968	1.170	1.264	1.101
	linear + degenerado	16425	32796	49275	0.912	0.945	0.833
5	linear	4484	4510	13452	0.958	1.045	0.903
	rígido + HM	-	26904	67446	1.017	1.011	1.007
	linear HM	4484	53280	80898	0.917	0.955	0.840
	rígido + degenerado	22482	26904	67446	1.013	1.008	1.006
	linear + degenerado	26966	53280	80898	0.909	0.933	0.829

7.2 Capacidade de carga de fundações superficiais

Desde os trabalhos pioneiros de Terzaghi [122] que é usual exprimir a capacidade de carga de uma fundação solicitada em condições drenadas através de equações que decompõem a referida capacidade em três parcelas distintas e cujo efeito da interacção entre elas é assumido como sendo nulo¹:

$$q_u = c'N_c + \bar{q}N_q + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma \quad (7.1)$$

Na expressão anterior, q_u é a capacidade de carga da fundação, B é a largura da menor dimensão da sapata e \bar{q} é a sobrecarga superficial uniformemente distribuída, simulando a acção do peso próprio do solo acima ao nível da cota de fundação; c' e γ representam, respectivamente, a coesão efectiva e o peso próprio do material de fundação. N_c , N_q e N_γ são os coeficientes de capacidade de carga associados a cada uma das parcelas que contribuem para a capacidade de carga, nomeadamente, o termo coesivo, o termo de profundidade e o termo resultante do comportamento atrítico do solo devido à acção do seu peso próprio. De modo a conferir uma característica geral à equação 7.1 sem entrar em grande detalhe, considera-se, neste trabalho, que os coeficientes de capacidade de carga englobam também o efeito da forma da sapata. Assim, estes coeficientes dependem não só do ângulo de atrito do solo, mas também da geometria da fundação. Demais efeitos como, por exemplo, o da inclinação ou da excentricidade da carga, resistência do solo acima da cota de fundação, ou da existência de um estrato rígido não são aqui abordados, correspondendo a expressão ao caso de um carregamento vertical e centrado.

Quando uma fundação é solicitada pelo mesmo tipo carregamento mas em condições não drenadas, a expressão (7.1) toma a forma:

$$q_u = c_u N_c + \bar{q} \quad (7.2)$$

em que c_u corresponde à resistência ao corte não drenada do solo.

Com a finalidade de complementar a caracterização do modelo desenvolvido e ilustrar as suas capacidades de cálculo, nos exemplos numéricos seguintes são determina-

¹Esta hipótese, que permite a sobreposição dos efeitos, é manifestamente inexacta tendo em conta as características de não-linearidade do problema. Contudo, é aqui assumida por ser prática corrente no domínio da Engenharia Civil, estando inclusivamente contemplada no EC7 [25], por ser considerada capaz de produzir resultados satisfatórios.

das estimativas dos valores dos coeficientes de capacidade de carga para alguns casos específicos. As condições drenadas são simuladas assumindo o critério de cedência de Mohr-Coulomb com os parâmetros c e ϕ iguais às propriedades efectivas do solo, c' e ϕ' . Para situação não drenada adopta-se o critério de Tresca caracterizado por uma coesão c igual à resistência ao corte não drenada do solo, c_u .

7.2.1 Sapata circular

Analisa-se o caso de uma fundação superficial rígida de geometria circular, onde são desprezados os efeitos do peso próprio do solo e do atrito no contacto solo/estrutura. No que respeita ao carregamento, considera-se apenas a acção de uma carga vertical na sapata, q . As condições enunciadas conduzem à determinação do coeficiente N_c . O critério que presidiu à escolha deste problema em particular baseou-se no facto de ser conhecida a sua solução exacta, encontrada no trabalho de Cox *et al.* [34].

Devido às condições de axisimetria do problema foi discretizada apenas uma fatia de 10° da região em análise, conforme é representado na Figura 7.14. De acordo com a simplificação efectuada, os deslocamentos nodais nos planos de simetria são restringidos nas direcções normais aos planos correspondentes. Adicionalmente, são também impedidos todos os deslocamentos dos nós localizados nos planos lateral e inferior que delimitam o terreno.

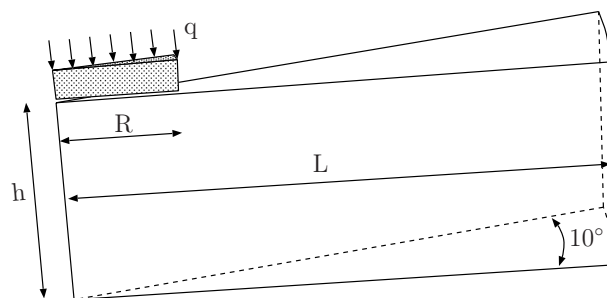


Figura 7.14: Modelo da sapata circular

Este estudo foi conduzido para diferentes ângulos de atrito do material, ϕ , recorrendo à utilização de dois critérios de cedência distintos, consoante as diferentes situações. Esta informação encontra-se discriminada na Tabela 7.7, juntamente com os valores dos parâmetros geométricos adoptados. Note-se que as dimensões da região discretizada variam significativamente em função do ângulo de atrito. Tal

deve-se ao conhecido aumento progressivo da região mobilizada pelos mecanismos de colapso com o aumento de ângulo de atrito para este tipo de problemas [28], conforme referido anteriormente.

Tabela 7.7: Caracterização dos materiais e parâmetros geométricos

ϕ	Material	$\frac{h}{R} \times \frac{L}{R}$
-	Tresca	0.750×2.25
10°	Mohr-Coulomb	0.875×2.75
20°	Mohr-Coulomb	1.190×3.50
30°	Mohr-Coulomb	1.625×4.75
40°	Mohr-Coulomb	3.125×7.25

A condição de contacto solo/estrutura de escorregamento perfeito foi simulada através da introdução de elementos axiais de barra rígidos a estabelecer a ligação entre os nós dos elementos da sapata e os do solo. Estabeleceu-se ainda que os elementos da sapata formassem um único corpo rígido. Foram considerados dois tipos distintos de malhas de elementos finitos, representados na Figura 7.15, sendo, para cada um deles, testados diferentes níveis de refinamento do número de elementos, utilizando-se tanto elementos lineares como quadráticos.

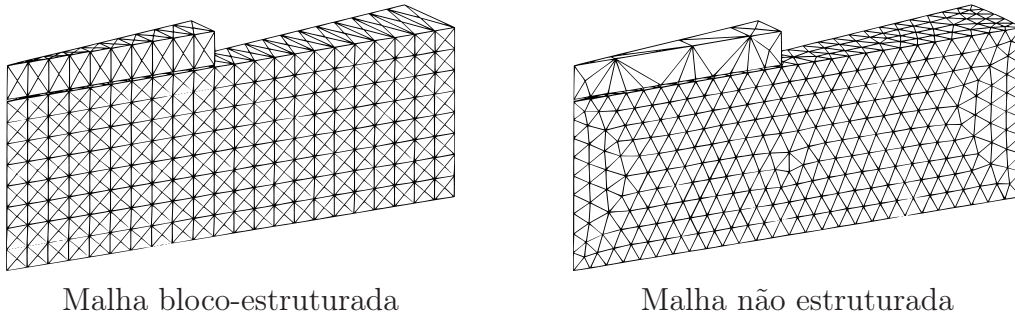


Figura 7.15: Malhas tipo para a análise da sapata circular

Retoma-se agora o estudo comparativo do desempenho entre elementos lineares e quadráticos, representando-se no gráfico das Figuras 7.16 a 7.20, a evolução do erro da solução,

$$\text{Erro}(\%) = \frac{N_c - N_c^{\text{exacto}}}{N_c^{\text{exacto}}} 100 \quad (7.3)$$

em função do número do graus de liberdade, para os vários ângulos de atrito estudados.

O comportamento discrepante associado à utilização de elementos lineares com malhas não-estruturadas confirma, desde logo, a inadequabilidade da sua utilização,

devido a apresentarem de acentuados efeitos de *locking*. É possível também constatar que estes problemas não se restringem a materiais puramente coesivos com escoamentos plásticos isocóricos, modelados, neste caso, pelo critério de Tresca, afectando igualmente materiais ditos friccionais, tipificados aqui pelo critério de Mohr-Coulomb. Por esta razão exclui-se, doravante, o resultado destas malhas de futuras considerações sobre o comportamento do modelo numérico.

É interessante verificar também que os valores do erro das soluções tendem a aumentar com o ângulo de atrito. Na realidade, este facto não se deve a qualquer dificuldade numérica inerente ao comportamento do material mas sim, ao aumento da região discretizada e conseqüente redução na densidade de elementos finitos. Note-se que o número de elementos e conseqüentemente o NGL utilizado nas diferentes análises é bastante semelhante independentemente do valor do ângulo de atrito.

A análise destes gráficos revela uma convergência gradual e consistente das soluções com o aumento dos graus de liberdade. Existe, contudo, uma pequena excepção observada no gráfico da Figura 7.20, para os resultados da malha não-estruturada de elementos quadráticos. Embora não tenha sido encontrada nenhuma explicação considerada definitiva e irrefutável para esta ocorrência, conjectura-se, no entanto, que possa dever-se à distribuição espacial dos elementos finitos nas diversas malhas.

O confronto das soluções evidencia um desempenho bastante análogo entre os elementos lineares e quadráticos para as malhas bloco-estruturadas. Verifica-se, toda-

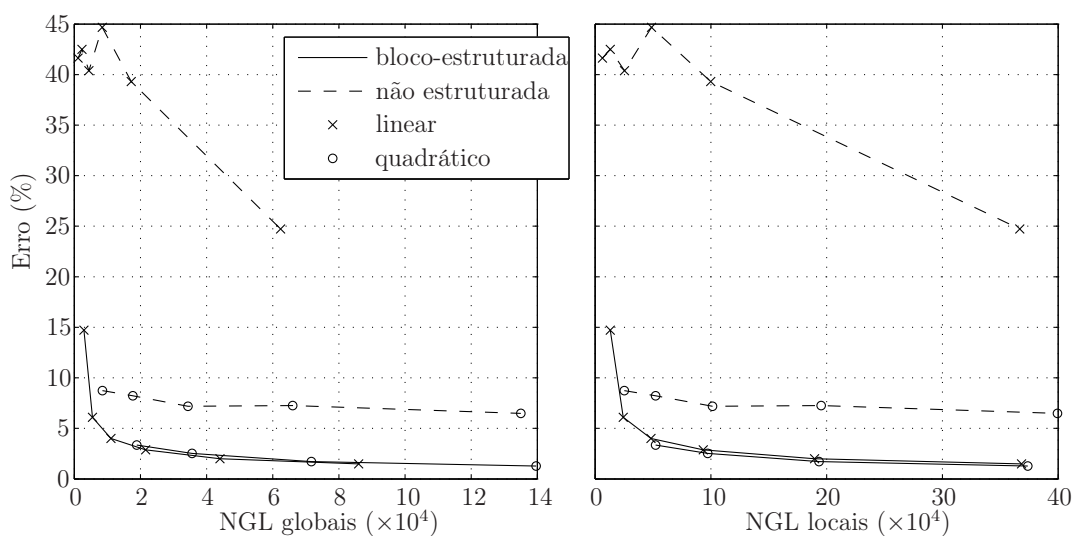


Figura 7.16: Evolução do erro da solução para o material Tresca

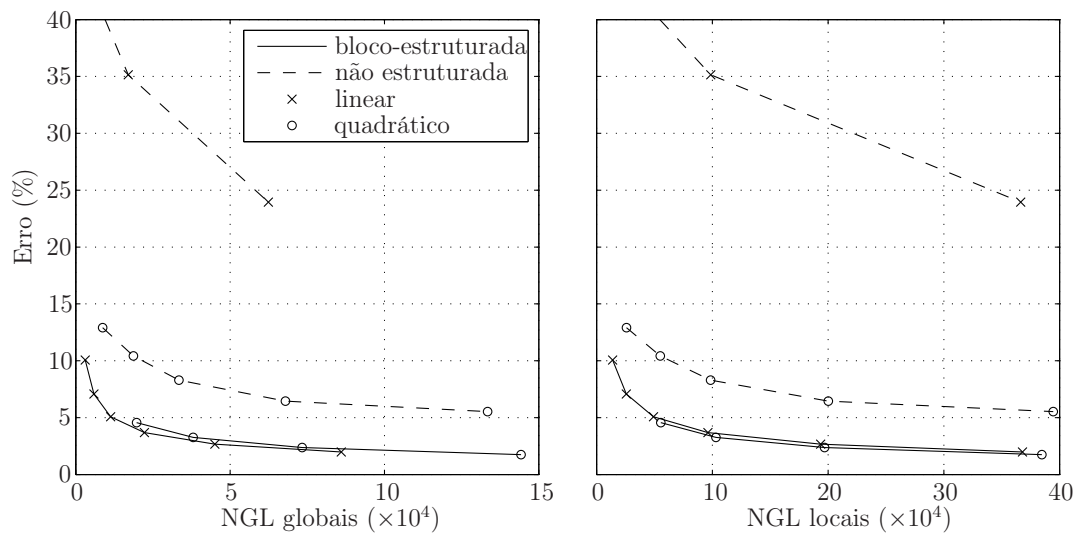


Figura 7.17: Evolução do erro da solução para $\phi = 10^\circ$

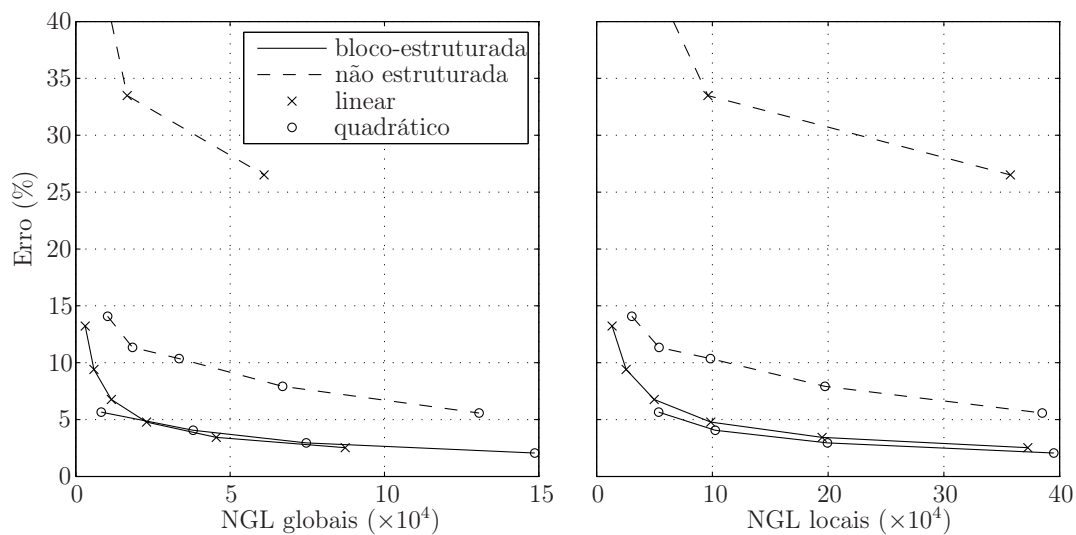


Figura 7.18: Evolução do erro da solução para $\phi = 20^\circ$

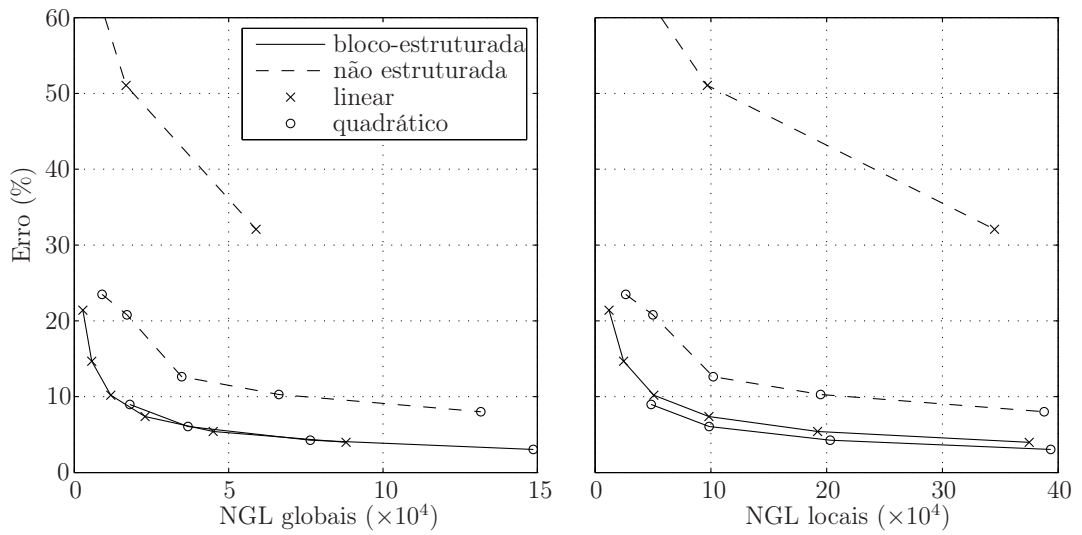


Figura 7.19: Evolução do erro da solução para $\phi = 30^\circ$

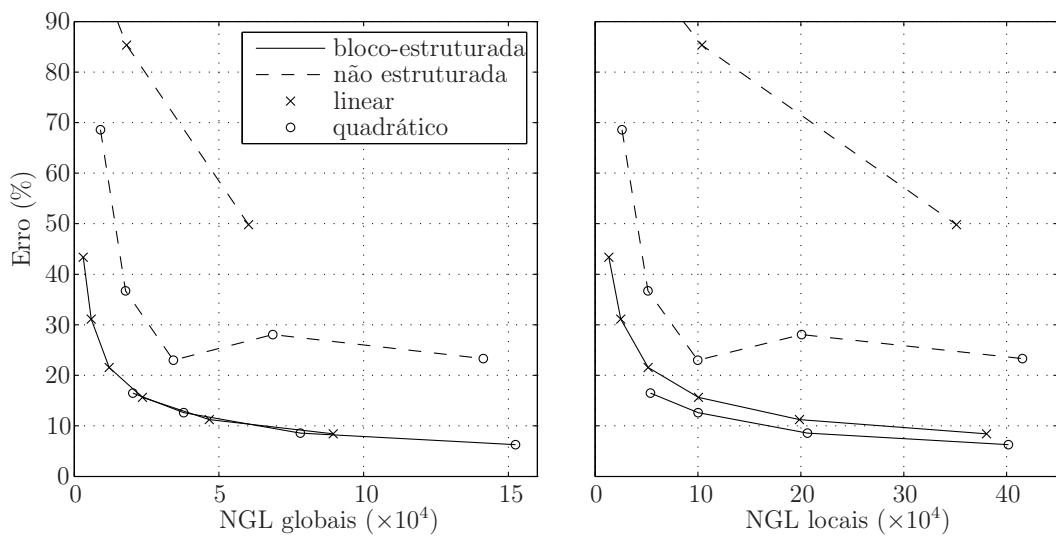


Figura 7.20: Evolução do erro da solução para $\phi = 40^\circ$

via, uma ligeira vantagem na utilização dos elementos quadráticos respeitante aos NGL locais que se acentua com o aumento do ângulo de atrito. É possível inferir, também, a não competitividade das malhas não estruturadas face às bloco-estruturadas, estando em regra geral a discrepância entre os melhores valores obtidos por estes dois tipos de malha situada entre os 3 e 5%. Este valor vê-se aumentado para os 14% para o caso particular do ângulo de atrito de 40°.

Na Tabela 7.8 apresentam-se os resultados da utilização do algoritmo de melhoria da solução em pós-processamento, descrito na secção 5.5. Para tal, indica-se o valor atingido para a carga de colapso antes e depois da aplicação do pós-processamento. Reitera-se a aplicabilidade restrita deste algoritmo aos casos onde se recorre simultaneamente a elementos quadráticos e materiais puramente coesivos (neste caso, tipificados pelo critério de Tresca). Neste quadro é ainda indicado o valor percentual da redução da estimativa inicial de colapso. Como se pode comprovar pelos valores listados, este simples algoritmo produz, de facto, melhorias notórias, tanto mais relevantes quanto menor a densidade de elementos da malha.

Tabela 7.8: Resultados do pós-processamento da solução

Tipo de malha	Número de elementos	Carga de colapso ($\frac{qu}{c}$)		redução (%)
		sem pós-process.	com pós-process.	
não estruturado	2105	6.2879	6.1875	1.62%
não estruturado	4357	6.2569	6.1577	1.61%
não estruturado	8455	6.1749	6.0993	1.24%
não estruturado	16274	6.1557	6.1032	0.86%
não estruturado	33294	6.1200	6.0589	1.01%
bloco-estruturado	4356	5.9017	5.8805	0.36%
bloco-estruturado	8112	5.8487	5.8332	0.26%
bloco-estruturado	16128	5.7985	5.7875	0.19%
bloco-estruturado	31152	5.7717	5.7629	0.15%

Agora, para as malhas que produziram anteriormente os melhores resultados com cada ângulo de atrito, é representada no gráfico da Figura 7.21 a evolução da estimativa do valor do coeficiente de capacidade de carga, N_c , com o decorrer do processo iterativo de Uzawa. Constata-se que o desempenho é fortemente condicionado pelas propriedades do material, observando-se uma redução na velocidade de convergência com o aumento do ângulo de atrito. Adoptando uma terminologia usualmente uti-

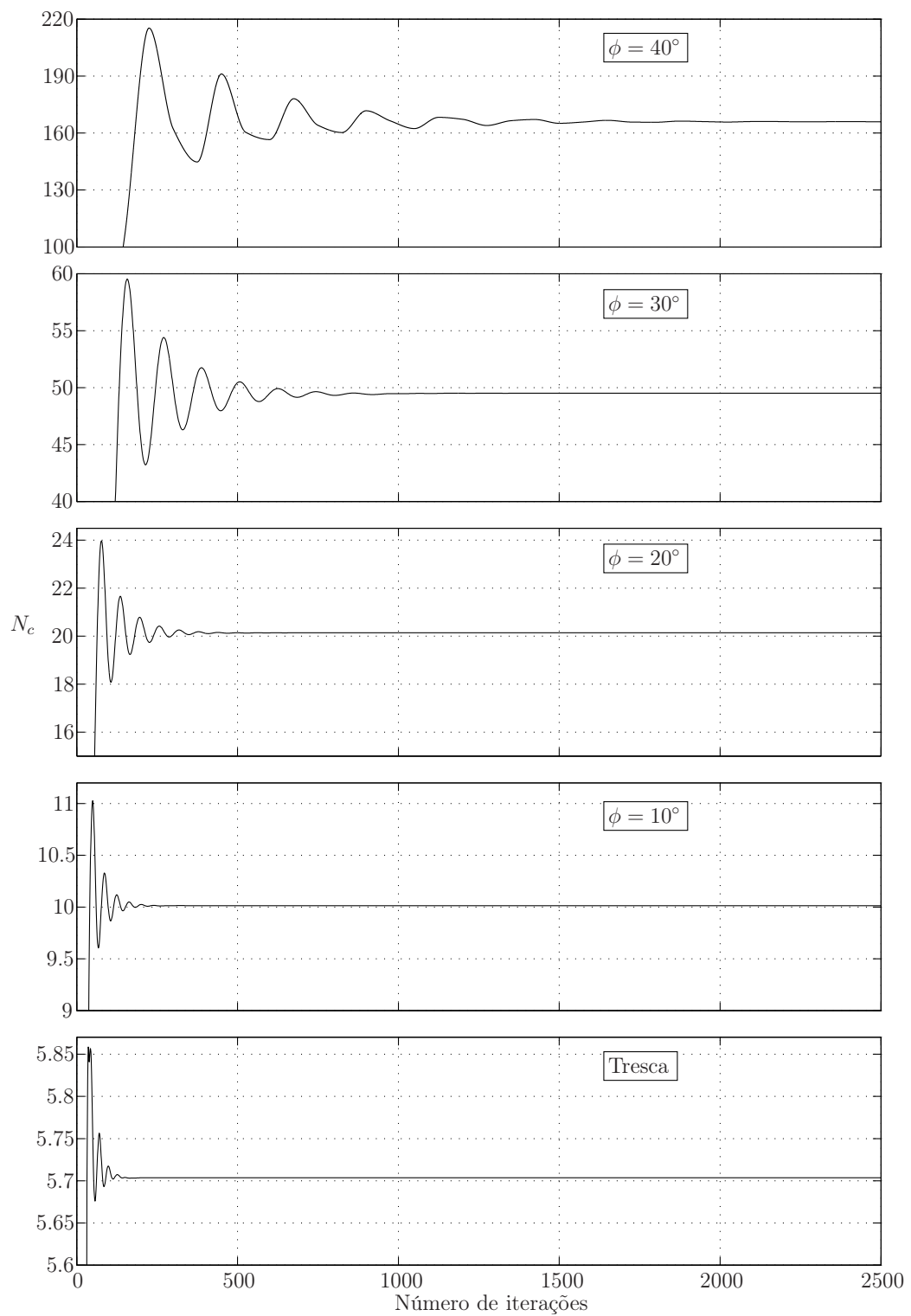


Figura 7.21: Ilustração da convergência do algoritmo de Uzawa

lizada para fenómenos oscilatórios, pode-se afirmar que, qualitativamente, todos os casos representados apresentam um comportamento oscilatório semelhante, no qual se observa um amortecimento da amplitude da onda com o número de iterações do algoritmo de Uzawa. Estas oscilações processam-se, grosso modo, em torno da solução óptima do problema. Verifica-se que o amortecimento tende a diminuir com o aumento do ângulo de atrito; por outro lado observa-se que o comprimento das ondas aumenta consideravelmente em função deste parâmetro.

De modo a evidenciar o poder de cálculo decorrente da implementação paralela da formulação, procede-se de novo ao cálculo dos valores para o coeficiente de capacidade de carga N_c , desta feita utilizando malhas com um elevadíssimo grau de refinamento. Para tal recorreu-se a malhas bloco-estruturadas, com cerca de 400 mil elementos quadráticos. Na tentativa de superar o efeito da singularidade na solução, provocado pelo bordo da sapata, estas malhas exibem a particularidade de terem um refinamento de elementos por baixo desta zona. Associado à presente discretização tem-se, aproximadamente, 1.9 milhões de graus de liberdade globais, cifrando-se os locais em 5 milhões. Este elevado número de variáveis envolvidas na discretização do problema inviabiliza a execução dos cálculos num usual computador pessoal, devido primeiramente à quantidade de memória exigida e em segundo lugar aos, previsivelmente excessivos, tempo de cálculo. Refira-se que estas malhas resultam de um refinamento p das malhas de elementos lineares, utilizadas em [130].

Os cálculos foram efectuados através da variante da implementação paralela do algoritmo PSPASES utilizando-se 8 núcleos de processamento (*cores*), sendo que um deles partilha em simultâneo as tarefas de *Master* e de *Slave*.

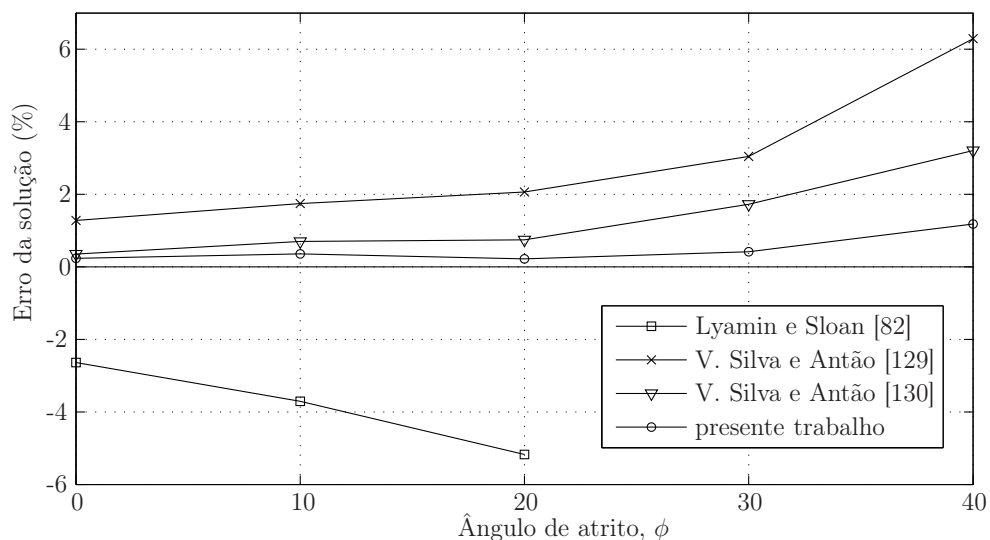
Os resultados obtidos encontram-se resumidos na Tabela 7.9. Nesse quadro encontra-se ainda, para cada um dos casos estudados, informação respeitante ao tempo de cálculo necessário à resolução de cada problema e ao número de *Slaves* utilizados.

Tendo em conta a dificuldade numérica associada a este tipo de problemas, pode-se considerar que a precisão dos resultados obtida é bastante apreciável. Para reforçar este facto, exibem-se no gráfico da Figura 7.22, juntamente com os valores retirados da Tabela 7.9, outros resultados igualmente obtidos através de métodos numéricos baseados na Análise Limite. Aí encontram-se, para além das soluções obtidas com elementos lineares recorrendo à variante da implementação paralela que utiliza o método da subestruturação [130], outros dois conjuntos de soluções provenientes de

Tabela 7.9: Cálculos do coeficiente N_c em paralelo

Material	ϕ	N_c	Erro (%)	Tempo de cálculo	Número de <i>Slaves</i>
Tresca	-	5.703	0.23%	18m 32s	8
Mohr-Coulomb	10°	10.016	0.36%	33m 09s	8
Mohr-Coulomb	20°	20.144	0.22%	44m 15s	8
Mohr-Coulomb	30°	49.505	0.42%	1h 4m 20s	8
Mohr-Coulomb	40°	165.94	1.18%	2h 10m 58s	8

implementações sequenciais. O primeiro baseia-se na utilização da formulação de limite superior [129], intitulada neste trabalho de inicial (ver secção 4.2) e o último da análise através de uma formulação de limite inferior, publicado no trabalho de Lyamin and Sloan [82]. O confronto destes resultados deixa patente um aumento da precisão dos valores obtidos, resultante do aumento das capacidades de cálculo devido à utilização da computação paralela.

Figura 7.22: Coeficiente de capacidade de carga N_c

Na Figura 7.23 reproduz-se a distribuição da dissipação plástica para cada um dos ângulos de atrito considerados. A sua observação permite corroborar os comentários efectuados sobre o aumento da região mobilizada pelos mecanismos de colapso em função do ângulo de atrito. De forma a proporcionar uma melhor noção sobre a extensão da região de colapso, são cotadas na figura, de um modo aproximado, as

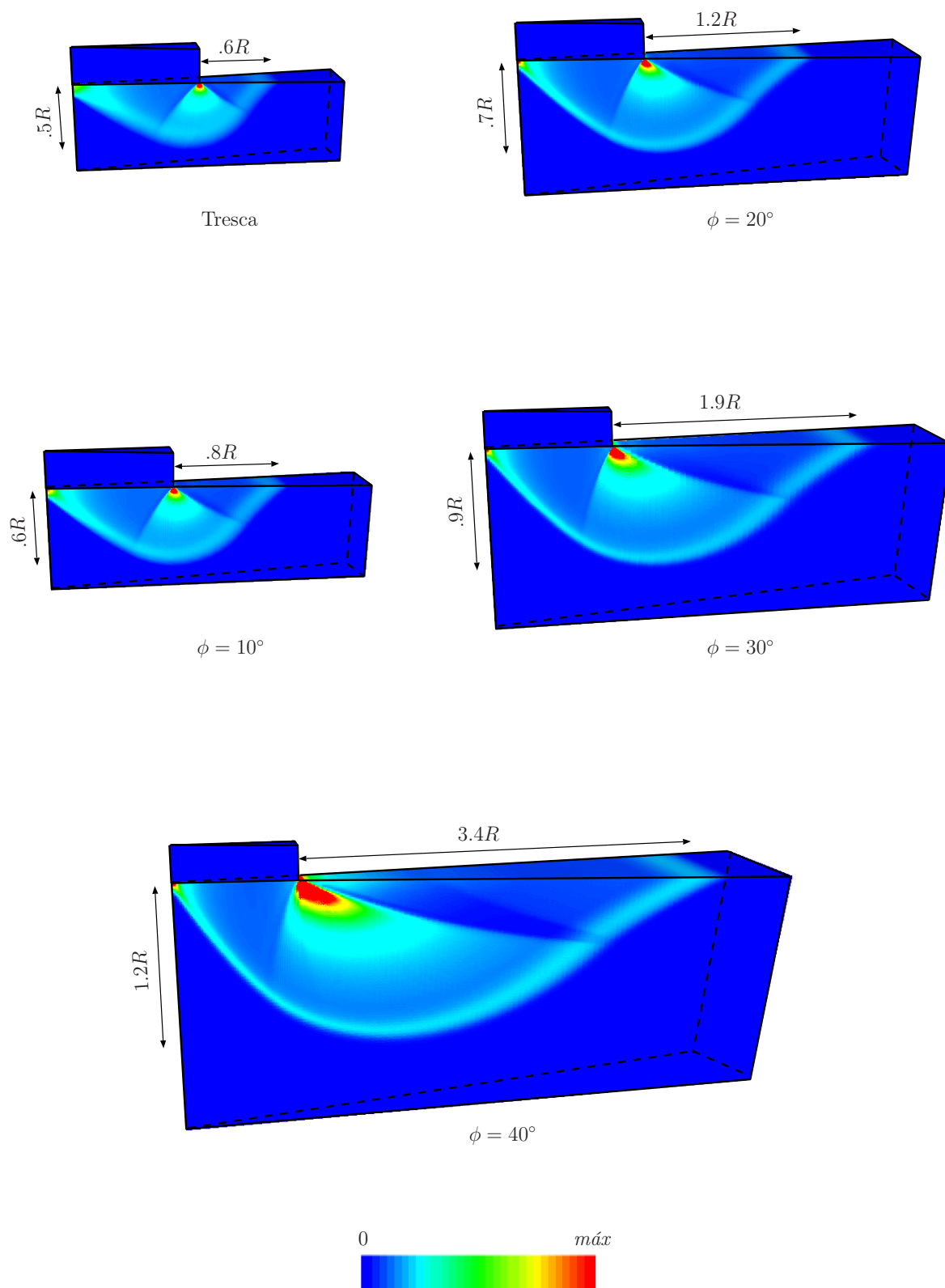


Figura 7.23: Dissipação plástica nas sapatas circulares

suas dimensões.

7.2.2 Sapatas quadrada e rectangular

Prossegue-se com a determinação de coeficientes de capacidade de carga mas, desta feita, para sapatas de geometria quadrada e rectangular. A complexidade desta temática não permitiu, até à data, a obtenção de soluções exactas pelo que é ainda hoje objecto de investigação por parte de diversos autores.

Não se pretende aqui, de modo algum, efectuar um estudo exaustivo deste problema. Pelo contrário, procedeu-se à selecção de um número limitado de situações que, após testadas, permitam não só a prossecução da ilustração do comportamento da formulação desenvolvida mas também a aferição das capacidades de cálculo disponibilizadas por esta ferramenta numérica, mediante a comparação dos valores obtidos com valores de referência encontradas na literatura.

Assim, consideraram-se apenas duas geometrias para as sapatas, nomeadamente aquelas que correspondem a uma relação das dimensões em planta, $B \times L$ (comprimento \times largura), de $\frac{B}{L} = 1$ ou de $\frac{B}{L} = \frac{1}{2}$. Para o material que constitui o solo, estudaram-se igualmente duas possibilidades distintas: um comportamento puramente coesivo modelado através do critério de Tresca (identificado como caso $\phi = 0$ de modo a abreviar a notação) e através do critério de Mohr-Coulomb um comportamento do tipo friccional caracterizado por um ângulo de atrito, $\phi = 30^\circ$. Neste último caso, analisam-se não só situações onde se tem em conta o comportamento combinado friccional e coesivo, bem como uma situação onde se admite um comportamento puramente friccional ($c = 0$). É pressuposta a indeformabilidade da sapata, sendo esta modelada através de um corpo rígido. Em resultado das condições de simetria do problema, é modelado apenas um quarto da estrutura (ver Figura 7.24). As condições cinemáticas de fronteira impostas ao modelo consistem em restringir os deslocamentos dos nós localizados nos planos de simetria nas direcções normais aos planos correspondentes, sendo impedidos todos os deslocamentos nodais nos restantes planos laterais que delimitam o terreno bem como no plano inferior. Desta vez, considera-se a ligação entre a sapata e o solo perfeitamente rugosa.

À semelhança dos exemplos anteriores, começa-se por efectuar um estudo comparativo entre o desempenho de elementos lineares e quadráticos, em malhas tanto

bloco-estruturadas como não estruturadas, exemplificadas na Figura 7.24. Para tal, determina-se o valor do coeficiente N_c para o caso da sapata quadrada e material puramente coesivo, sendo esta análise efectuada considerando a carga vertical da sapata como única acção.

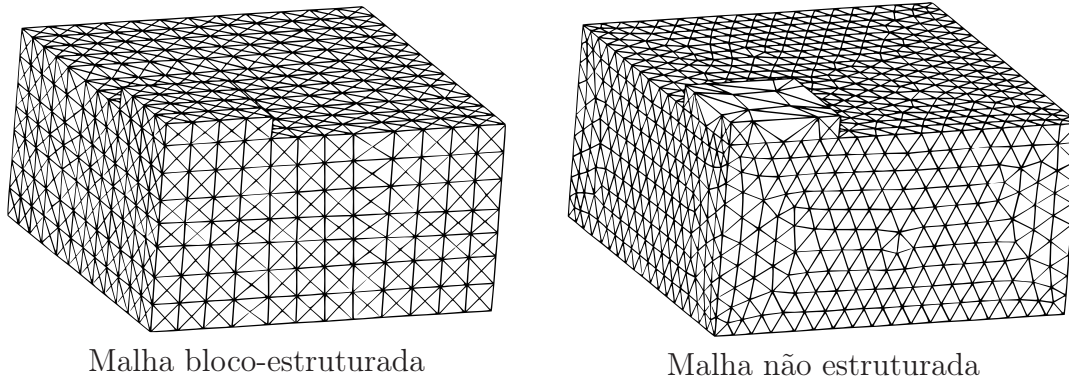


Figura 7.24: Exemplo de malhas tipo

Na Tabela 7.10 encontram-se discriminadas as características das várias malhas utilizadas para este estudo. É, para cada caso, listado o tipo de malha e de elementos finitos utilizados, bem como o número de elementos da malha e dos graus de liberdade. Convém esclarecer que a consideração de malhas não estruturadas de elementos lineares foi preliminarmente excluída dos casos analisados, devido às limitações demonstradas nos exemplos precedentes. Por último, são ainda incluídos, na referida tabela, os valores obtidos para o coeficiente N_c .

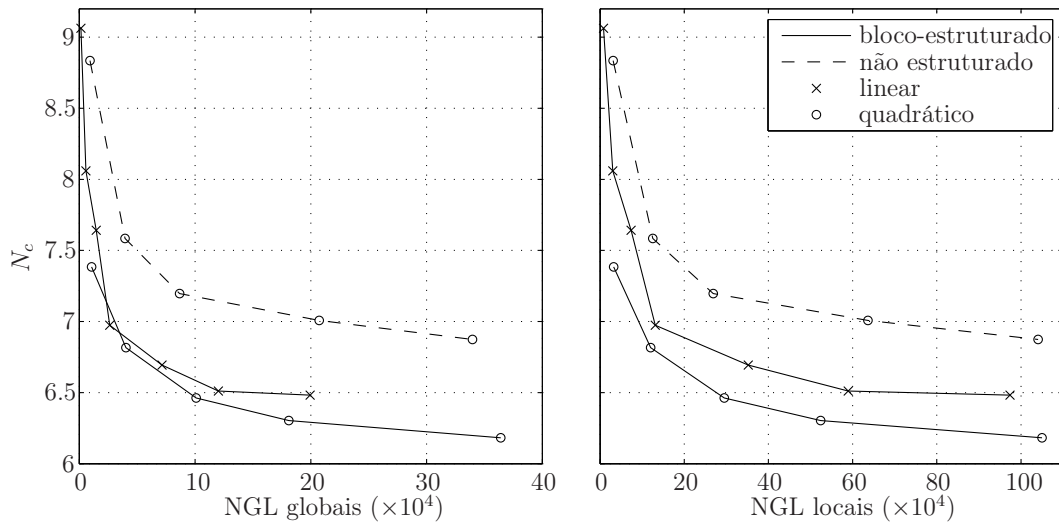
Com base nesta informação, é ainda representada a evolução do valor de N_c em função dos graus de liberdade do problema, no gráfico da Figura 7.25.

Mais uma vez se conclui, através da análise dos dados apresentados, que em situações análogas são os elementos quadráticos que revelam melhor capacidade de produzir bons resultados com um menor número de graus de liberdade. Não sendo muito notória para os graus de liberdade globais, esta vantagem tende a acentuar-se em relação aos graus de liberdade locais. Novamente se confirma a vantagem da utilização de malhas bloco-estruturadas em detrimento das não estruturadas, permitindo às primeiras ganhos da ordem dos 10%, no presente caso.

Prossegue-se com a determinação de estimativas de elevada precisão para todos os coeficientes de capacidade de carga considerados. De modo a atingir estes objectivos recorreu-se a malhas bloco-estruturadas uniformes, de elementos quadráticos, com um elevado grau de refinamento, encontrando-se resumidos na Tabela 7.11, os dados

Tabela 7.10: Informação da análise comparativa da utilização de elementos lineares e quadráticos

Tipo de malha	Tipo de elementos	Número de elementos	NGL		N_c
			globais	locais	
bloco-estruturada	linear	2688	1521	8064	9.0631
bloco-estruturada	linear	10008	5814	30024	8.0593
bloco-estruturada	linear	24576	14677	73728	7.6416
bloco-estruturada	linear	43680	26387	131040	6.9740
bloco-estruturada	linear	117432	71568	352296	6.6937
bloco-estruturada	linear	196536	120164	589608	6.5109
bloco-estruturada	linear	324672	199523	974016	6.4821
bloco-estruturada	quadrático	2688	10604	32256	7.3839
bloco-estruturada	quadrático	10008	40279	120096	6.8167
bloco-estruturada	quadrático	24576	101007	294912	6.4622
bloco-estruturada	quadrático	43680	181097	524160	6.3037
bloco-estruturada	quadrático	87504	364160	1050048	6.1816
não estruturada	quadrático	2582	9221	30984	8.8356
não estruturada	quadrático	10448	39521	125376	7.5838
não estruturada	quadrático	22419	86646	269028	7.1960
não estruturada	quadrático	53015	207291	636180	7.0076
não estruturada	quadrático	86725	339776	1040700	6.8740

Figura 7.25: Evolução do valor de N_c com refinamento da malha para o caso de $\frac{B}{L} = 1$ e $\phi = 0$

referentes às discretizações adoptadas. Na mesma tabela, as dimensões b , l e h representam, respectivamente, o comprimento, largura e altura da massa de solo do modelo numérico. Tal como se pode constatar, houve a necessidade de adequar as dimensões do modelo para fazer face à extensão da região mobilizada pelos diferentes mecanismos de colapso para cada uma das situações analisadas.

Tabela 7.11: Características das malhas utilizadas para a análise das sapatas quadradas e rectangulares

ϕ	$\frac{B}{L}$	$\frac{b}{B}$	$\frac{l}{B}$	$\frac{h}{B}$	Número de elementos	NGL	
						globais	locais
0°	1	1.25	1.25	0.66	285144	1189813	3421728
	1/2	1.5	1.8	0.75	303480	1261417	3641760
30°	1	2.8	2.8	1.25	429264	1811513	5151168
	1/2	3.5	2.9	1.45	441504	1862089	5298048

O número significativo de graus de liberdade envolvido nos cálculos obriga, necessariamente, à utilização de computação paralela, efectuada, no presente caso, através da variante do algoritmo PSPASES.

Neste instante, importa referir que o cálculo dos coeficientes N_q e N_γ faz-se considerando uma coesão efectiva nula ($c = 0$) e tendo como acções, para além da carga vertical da sapata considerada como variável, também um carregamento fixo correspondente à sobrecarga superficial ou ao peso próprio do solo, consoante os casos. É de realçar que, para muitas formulações, a utilização de um critério puramente friccional revela-se uma dificuldade numérica apreciável, procurando-se evitar esta situação através da consideração de uma coesão de valor desprezável ($c \approx 0$); esta era a situação da formulação inicial. Contudo, a presente formulação não requer desta medida, revelando, como se poderá constatar, ser capaz de transpor facilmente esta dificuldade.

Alternativamente, a determinação do coeficiente N_q pode ser realizada com base no valor do coeficiente N_c , através da seguinte expressão:

$$N_q = 1 + N_c \tan \phi \quad (7.4)$$

No trabalho de Zhu e Michalowski [135] é discutida a validade da utilização de (7.4) no presente contexto.

Na Tabela 7.12 apresentam-se as estimativas dos coeficientes de capacidade de carga para cada uma das situações consideradas. Juntamente, apresentam-se os resultados publicados em [130] obtidos com a variante da implementação paralela que utiliza o método da subestruturação e utilizando elementos lineares. Como termo de comparação, e por forma a salientar a boa qualidade dos valores obtidos, são ainda listados nesta tabela resultados obtidos por outros autores através de diferentes métodos. Os valores obtidos através de análise limite foram seleccionados em resultado de uma pesquisa pormenorizada na literatura técnica, tendo em vista a recolha dos melhores resultados publicados. É ainda apresentado um conjunto de resultados obtidos fora do âmbito da análise limite, enquadrando-se estes numa estratégia de análise incremental [48], [92] e por último o trabalho de Zhu e Michalowski [135] que combina estas duas técnicas.

Tabela 7.12: Valores dos coeficientes de capacidade de carga para as sapatas quadradas e rectangulares

	ϕ	$\frac{B}{L}$	Limite superior			Limite inferior	Análise incremental
			elementos quadráticos	elementos lineares [130]	outras formulações		
N_c	0°	1	5.964	6.051	6.221 [112]	5.523[112]	5.96 [48]
		1/2	5.726	5.821	6.022 [112]	5.359[112]	5.60 [48]
	30°	1	62.474	66.936	104.019 [91]	-	61.30 [92]
		1/2	51.672	57.233	67.099 [91]	-	-
N_q	30°	1	37.067	39.643	61.055* [91]	-	31.104 [135]
			37.070*	39.646*			
		1/2	30.716	34.123	39.740* [91]	-	27.450 [135]
N_γ	30°	1	18.444	19.648	21.82 [81]	12.67 [81]	19.896 [135]
		1/2	19.944	23.974	27.57 [81]	14.75 [81]	21.394 [135]

* valores calculados através da expressão (7.4)

Como se pode constatar através da comparação entre os diferentes resultados, a utilização da formulação aqui proposta, aliada à sua implementação paralela, permite a obtenção de valores de qualidade assinalável, sendo capaz de superar, invariavelmente, os melhores valores actualmente publicados com base em formulações de limite superior, com particular ênfase para os valores encontrados nos trabalhos recentes de Salgado *et al.* [112] e de Lyamin *et al.* [81].

Outro aspecto interessante que convém reter da análise dos resultados é a concordância dos valores obtidos para o coeficiente N_q , quer calculado directamente, quer através da expressão (7.4). Efectivamente, tal indicia que a utilização de coesão nula não parece afectar a precisão dos resultados da formulação numérica.

Na Figura 7.26 encontram-se representadas, para todas as configurações de sapata e materiais estudados, a distribuição da dissipação plástica correspondente à situação de colapso associada ao cálculo do coeficiente N_c . Lembra-se que, no caso dos restantes coeficientes, o colapso é atingido sem a ocorrência de dissipação plástica. Esta peculiaridade é consequência directa da consideração de um material com coesão nula.

Um exame atento do traçado das dissipações permite descortinar alguma irregularidade no seu padrão, influenciada, sem dúvida, pela transição entre elementos finitos. Contudo, esta irregularidade resulta, em grande medida, de limitações da representação gráfica adoptada: a ferramenta de representação gráfica, *ParaView*², atribui uma cor constante por elemento. Note-se que a influência desta limitação não se fez sentir nas ilustrações dos exemplos precedentes devido à maior densidade relativa de elementos das suas malhas. Esta limitação reflecte-se de um modo mais significativo no presente exemplo, devido a uma menor densidade de elementos nas malhas utilizadas.

No gráfico da Figura 7.27 é traçada a evolução da solução para todos casos estudados com sapatas quadradas, ao longo do processo iterativo de Uzawa. Nas ordenadas indica-se o valor da solução de forma normalizada, sendo o valor unitário correspondente ao valor final da solução. Por sua vez, o número de iterações indica-se no eixo das abcissas, em escala logarítmica. No gráfico da Figura 7.28, repete-se o mesmo tipo de informação, mas agora para os casos de sapatas com geometria rectangular.

Desde logo, ressalta da análise destes gráficos uma grande disparidade de comportamento relativo, conforme as características dos materiais e do tipo de carregamento em questão.

²www.paraview.org

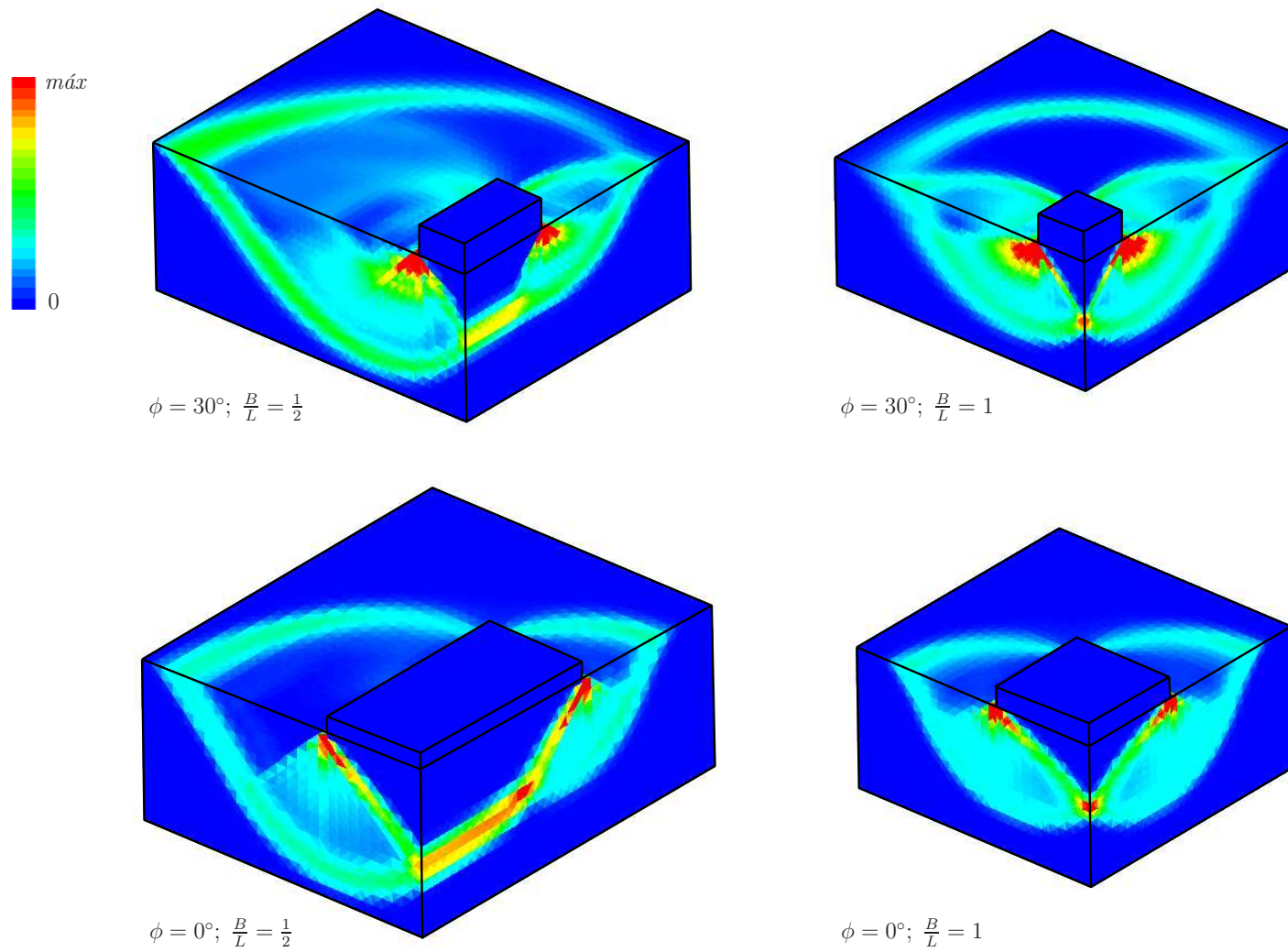


Figura 7.26: Dissipação plástica nas sapatas quadradas e rectangulares

Os exemplos referentes a materiais puramente coesivos destacam-se pela positiva, exibindo uma velocidade de convergência extremamente rápida. Salienta-se ainda o facto destes serem também os casos que apresentam um traçado onde um comportamento do tipo oscilatório é pouco ou nada perceptível.

Ao contrário, os exemplos referentes ao cálculo do coeficiente N_γ são aqueles que apresentam uma convergência mais lenta. Esta caracteriza-se por uma etapa final onde o comportamento oscilatório inicial termina e o valor da solução decresce lentamente para o resultado final. A propósito deste exemplo, revela-se que, da experiência adquirida através da análise de diversos exemplos, os que apresentam pior convergência são, invariavelmente, aqueles que utilizam materiais com ângulos de atrito elevados e uma combinação simultânea de carregamentos fixos e variáveis.

Confrontando agora o comportamento das soluções das sapatas quadradas com o das rectangulares, observa-se que existe uma ligeira tendência de uma maior rapidez de convergência por parte das primeiras. A alteração de geometria do problema reflectindo-se na perda de simetria dos mecanismos de colapso e o maior número de elementos utilizados para a discretização dos casos das sapatas rectangulares, são os dois factores apontados para esta diferença de comportamento.

Outro aspecto interessante a reter é o dos traçados referentes aos cálculos dos coeficientes N_c e N_q apresentarem um número semelhante de iterações até atingir a convergência. Este facto reforça a ideia de que a presente formulação demonstra boa capacidade de lidar com materiais com um comportamento puramente friccional.

Na Tabela 7.13 são apresentados os tempos de cálculo para cada uma das situações consideradas. Para além do tempo total de cálculo, é ainda discriminado o tempo médio da duração de uma iteração de Uzawa e o tempo de execução de toda a etapa de cálculo que antecede o início do processo iterativo. As principais tarefas que constituem esta primeira etapa são a montagem e factorização do sistema governativo global.

Complementa-se a informação da Tabela 7.13 indicando o número de *Slaves* utilizados nos cálculos. De novo, optou-se por recorrer à estratégia em que um dos núcleos de processamento partilha, em simultâneo, as tarefas de *Master* e de *Slave*. Considera-se conveniente esclarecer a razão que esteve na base da utilização de um número diferente de *Slaves* para os diferentes casos. A utilização inicial de 16 *Slaves* permitiu efectuar dois cálculos em simultâneo, com os recursos informáticos disponíveis.

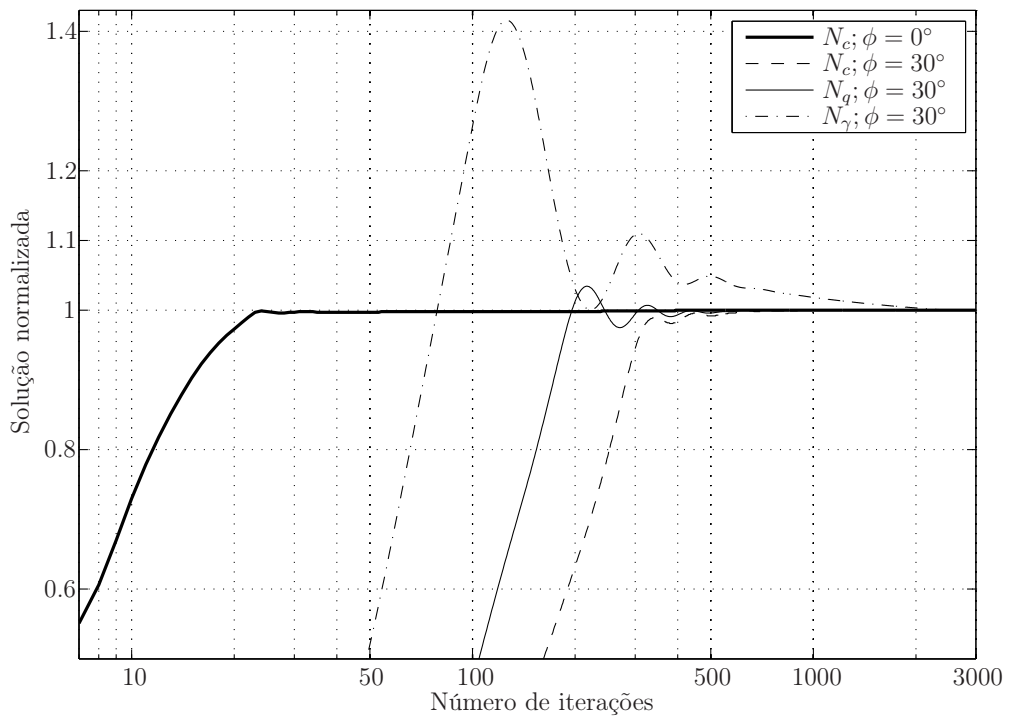


Figura 7.27: Convergência do algoritmo de Uzawa para as sapatas quadradas

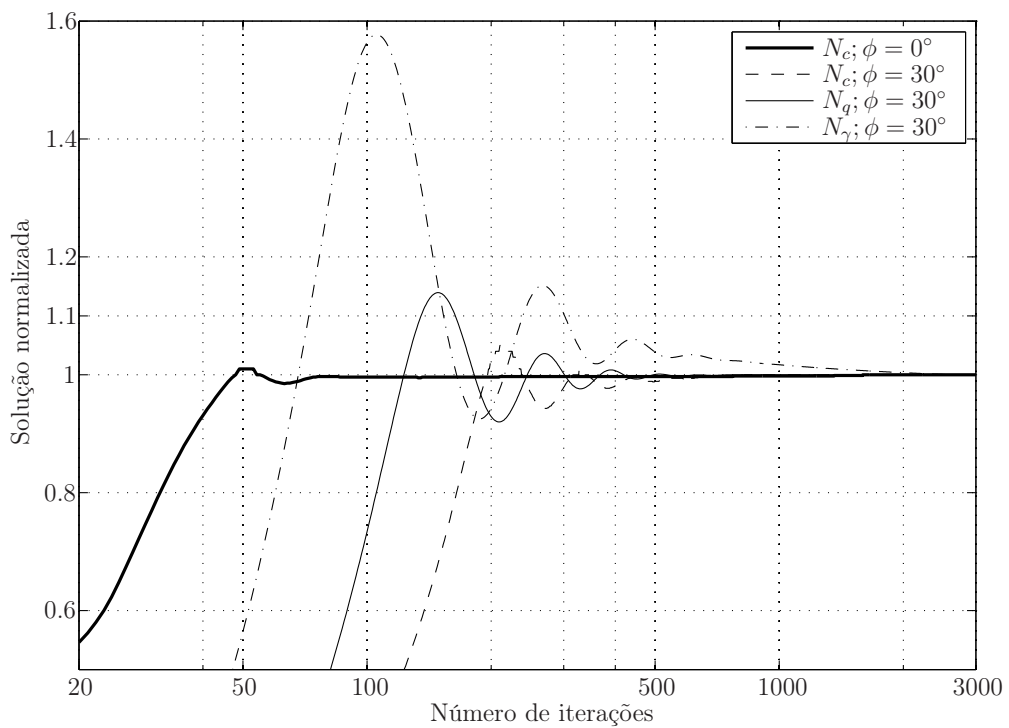


Figura 7.28: Convergência do algoritmo de Uzawa para as sapatas retangulares

Tabela 7.13: Tempos de cálculo dos problemas das sapatas quadradas e rectangulares

	ϕ	$\frac{B}{L}$	Tempo de cálculo			Número de <i>Slaves</i>
			montagem e factorização	médio por iteração	total	
N_c	0°	1	21m 38.8s	3.15s	37m 53.3s	16
		1/2	26m 36.3s	3.41s	43m 26.3s	16
	30°	1	43m 06.7s	4.43s	1h 42m 40.5s	32
		1/2	49m 45.3s	4.40s	1h 43m 50.4s	32
N_q	30°	1	42m 56.4s	4.48s	1h 27m 38.5s	32
		1/2	51m 51.9s	4.40s	1h 42m 36.1s	32
N_γ	30°	1	43m 40.4s	4.46s	3h 36m 51.4s	32
		1/2	47m 33.3s	4.36s	3h 45m 41.2s	32

Prosseguir com esta opção revelou-se, contudo, impossível para os restantes casos devido à necessidade de memória inerente ao maior número de NGL envolvidos nos cálculos. Assim, e em alternativa, os segundos exemplos foram executados sucessivamente, podendo assim cada um deles disponibilizar de todos os recursos existentes, tanto de memória como de processamento.

Começa-se por referir que os tempos de execução registados são, desde logo, ilustrativos do grande volume de cálculo envolvido nestes problemas. Conforme expectável, os tempos de cálculo são reflexo do comportamento observado na convergência do algoritmo de Uzawa (Figuras 7.27 e 7.28). Efectivamente, os maiores tempos coincidem com os casos de pior convergência. Observe-se também que a etapa inicial de cálculo, em virtude de englobar a factorização do sistema governativo global, representa uma parcela significativa do tempo total de execução, atenuando-se o seu peso relativo para os casos que apresentam piores taxas de convergência durante o algoritmo de Uzawa. Para concluir, sublinha-se o reduzido tempo médio por iteração, compensando um pouco o número elevado de iterações necessárias para a resolução da generalidade dos problemas.

7.2.2.1 Introdução de descontinuidades

Por forma a ilustrar o benefício resultante da utilização de elementos com descontinuidades, determina-se novamente o coeficiente de capacidade de carga N_c para o caso da sapata de geometria quadrada, mas introduzindo, numa região particular

da discretização da malha, elementos Híbridos-Mistos que possibilitam a de formação de descontinuidades no campo de velocidades. A observação da distribuição da dissipação plástica obtida para as soluções precedentes com campos de velocidades contínuos (Figura 7.26), revela a existência de elevadas dissipações no solo adjacente à extremidade da sapata. Deste modo, procedeu-se ao refinamento desta zona da malha com elementos Híbridos-Mistos quadráticos no domínio e lineares na fronteira.

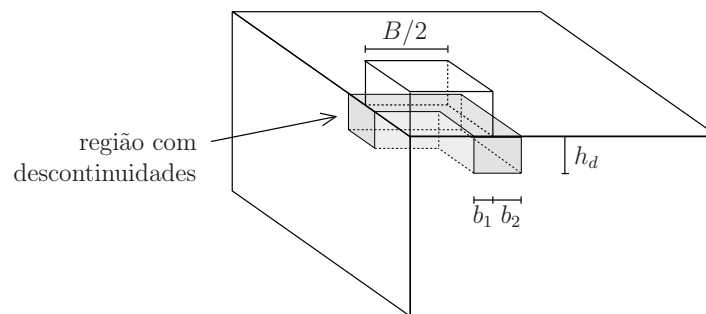


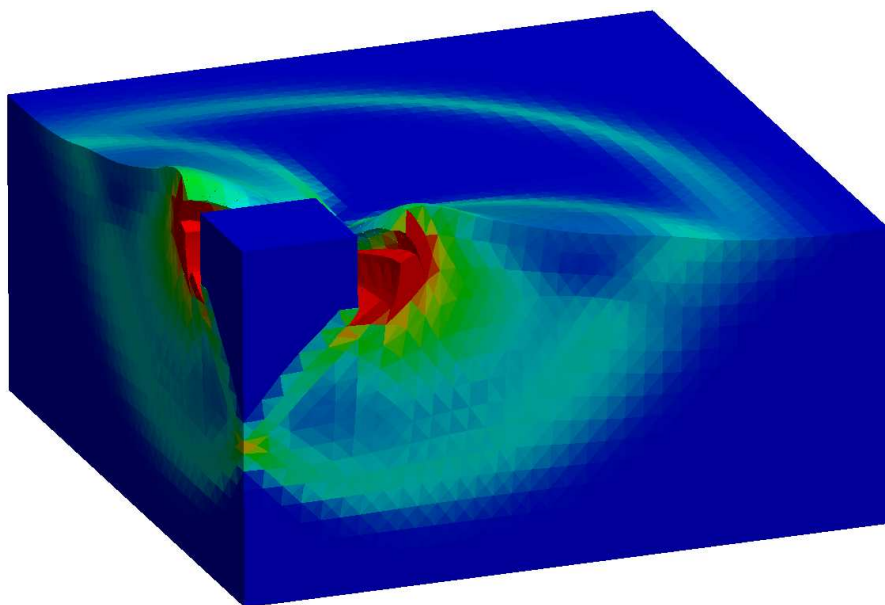
Figura 7.29: Identificação da região de elementos com descontinuidades

A ilustração da zona refinada encontra-se na Figura 7.29, sendo a caracterização dos parâmetros geométricos aí definidos compilada na Tabela 7.14. No mesmo quadro encontram-se, ainda, o número de fronteiras com descontinuidades bem como os NGL globais e locais, para ambas as malhas utilizadas. Por último, indicam-se os valores obtidos para o coeficiente N_c . Para facilitar a comparação dos resultados entre as malhas com e sem elementos de descontinuidades, recapitulam-se também na Tabela 7.14 os valores respectivos às primeiras análises.

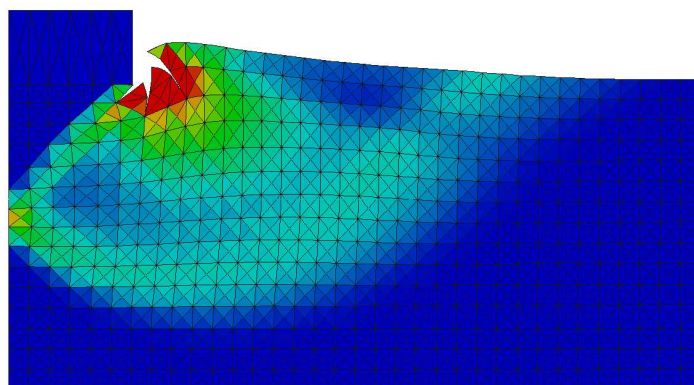
Tabela 7.14: Resumo das informações sobre as sapatas com descontinuidades

ϕ	Geometria			Nr. fronteiras com descont.	NGL		N_c
	$\frac{b_1}{B}$	$\frac{b_2}{B}$	$\frac{h_d}{B}$		globais	locais	
0°	-	-	-	-	1189813	3421728	5.964
	0.4	0.6	0.085	10346	1318785	3483804	5.950
30°	-	-	-	-	1811513	5151168	62.474
	0.4	0.66	0.16	4026	1862055	5175324	59.608

Da análise dos valores de N_c obtidos conclui-se que a introdução localizada de elementos com descontinuidades permite melhorar a precisão dos resultados, sem um acréscimo significativo de custos computacionais, sendo estes aferidos através dos NGL envolvidos nos cálculos. Efectivamente, observa-se uma redução de 0.24%



a) perspectiva tridimensional



b) secção de um plano de simetria

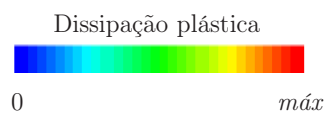


Figura 7.30: Mecanismo de colapso com descontinuidades para a sapata quadrada, associado ao coeficiente N_c e material de Mohr-Coulomb com $\phi = 30^\circ$

e 4.59%, para os casos correspondentes ao material Tresca e Mohr-Coulomb com $\phi = 30^\circ$, respectivamente. A melhoria menos acentuada verificada para a primeira situação pode encontrar justificação em, essencialmente, dois factores: (i) a densidade mais elevada de elementos na malha inicial associada ao critério de Tresca, o que torna a própria solução inicial mais precisa e com menos margem de melhoria; (ii) a contabilização da dissipação plástica associada às descontinuidades para o critério de Tresca durante a etapa de minimização local fazer-se de modo não exacto (ver secção 5.3.5), contrariamente ao procedimento adoptado para o critério de Mohr-Coulomb, podendo, desta forma, reduzir a eficácia do elemento Híbrido-Misto.

Na Figura 7.30 encontra-se representado o mecanismo de colapso para o caso correspondente ao material de Mohr-Coulomb com um ângulo de atrito, ϕ , de 30° ; situação na para a qual se registou a melhoria mais significativa com a introdução de descontinuidades. Na representação do mecanismo, na secção respectiva a um dos planos de simetria, é notório o efeito das descontinuidades do campo das velocidades.

7.2.3 Análise do desempenho da implementação paralela

A encerrar a secção dos exemplos numéricos do cálculo da capacidade de carga de fundações superficiais, é apresentado um estudo comparativo das diferentes estratégias de paralelização propostas no Capítulo 6. A aferição é realizada com base no tempo efectivo de execução. Este é o tempo decorrido desde o início ao fim do último cálculo, englobando não só os períodos de tempo de processamento efectivo, mas também os tempos despendidos com comunicações. Recorre-se ainda a uma medida, denominada de *Speedup* na terminologia inglesa, comumente utilizada na verificação da qualidade de algoritmos paralelos. O *Speedup*, simbolizado pelas letras S_p , é o quociente que contabiliza o aumento de velocidade de cálculo observado quando se executa um algoritmo paralelo em p processadores em relação à execução do *melhor* algoritmo sequencial equivalente. Deste modo, tem-se:

$$S_p = \frac{t_s}{t_p} \quad (7.5)$$

onde t_s e t_p são os tempos de execução dos algoritmos sequencial e paralelo, respectivamente. Perante a impossibilidade de garantir a implementação do *melhor*

algoritmo sequencial, utiliza-se o algoritmo sequencial existente para contabilizar o tempo de referência, t_s , sendo o *Speedup* assim obtido denominado de relativo.

De modo a evitar distorções dos resultados, garantiu-se a execução de todos os exemplos recorrendo apenas à memória física, a denominada *RAM* (do inglês *Random Access Memory*). Evita-se, assim, a utilização de memória recorrendo a registos no disco rígido, designada de *SWAP*, cujos tempos de acesso resultam numa redução significativa da velocidade de processamento.

Segue-se a descrição dos testes efectuados e respectivos resultados, após a qual se procede à discussão dos mesmos. Esta discussão é realizada de uma forma global, tentando conjugar simultaneamente as várias situações contempladas.

7.2.3.1 Teste I

A primeira situação aqui analisada, identificada por Teste I, diz respeito à análise da capacidade de carga de uma sapata circular num solo com um ângulo de atrito de 40° , utilizando-se, para o efeito, uma malha bloco-estruturada com 738343 elementos lineares. Esta discretização corresponde, respectivamente, a 521 mil e 2.2 milhões de graus de liberdade globais e locais, necessitando de, para a sua execução em processamento sequencial, cerca de 7GB de memória. Este é considerado um problema de pequena/média dimensão no contexto da computação paralela, sendo que a dimensão do problema é, em regra, aferida pelo NGL globais. Contudo, embora o presente caso já apresente um número considerável de graus de liberdade, a sua geometria confere uma esparsidade anormalmente elevada à matriz do sistema governativo global, justificando, desta forma, a classificação atribuída à dimensão do problema. A comprová-lo temos o reduzido consumo de memória observado.

O tempo total de computação para os cálculos realizados através da implementação sequencial foi de 3h 49m 46.4s.

Realiza-se um estudo comparativo do desempenho das diferentes variantes propostas para os algoritmos paralelos baseados em métodos de resolução directa, nomeadamente: o método da subestruturação, o método da subestruturação recursiva e o algoritmo PSPASES. Para este último caso foi considerada, adicionalmente, uma variante que se baseia na utilização do mesmo núcleo de processamento para executar o processo *Master* e um dos *Slaves*. Foi excluída deste teste a análise através do

método de FETI por este ser indicado para problemas de maior dimensão.

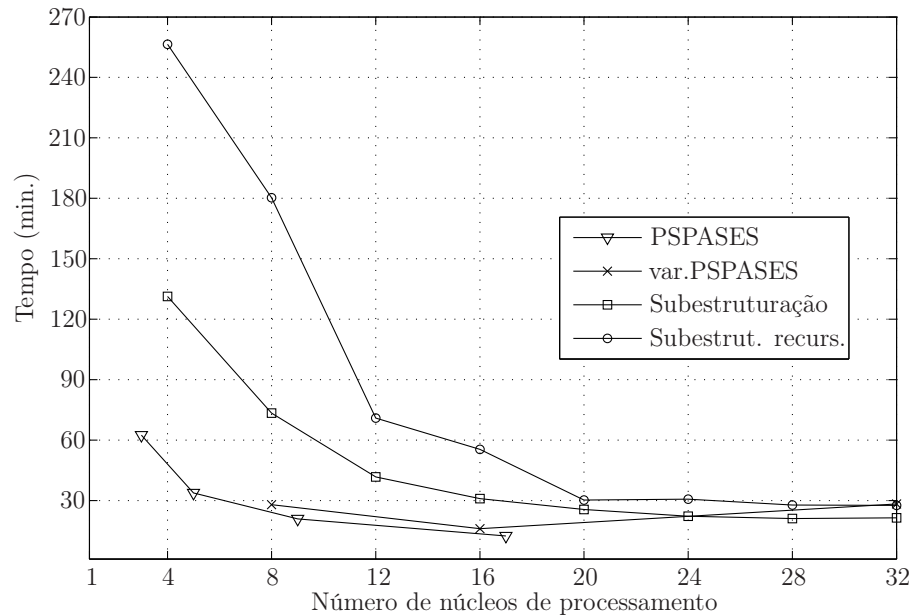


Figura 7.31: Teste I - tempo total de cálculo dos algoritmos paralelos

No gráfico da Figura 7.31 representa-se, para todos os algoritmos testados, a evolução do tempo total de cálculo em função do número de núcleos de processamento utilizados. Complementa-se esta informação com o gráfico da Figura 7.32, que representa a evolução registada para o coeficiente de *Speedup*. Como elemento de referência, é ainda marcada a linha correspondente a um *Speedup* linear.

7.2.3.2 Teste II

Para o Teste II retoma-se o problema do cálculo do coeficiente N_c para uma sapata de geometria rectangular assente num solo simulado por um material puramente coesivo. Neste caso, recorreu-se a uma malha bloco-estruturada com 56040 elementos, correspondendo a, respectivamente, 229 mil e 672 mil graus de liberdade globais e locais envolvidos na análise.

Classifica-se a dimensão deste problema como média, sendo necessário cerca de 14.5GB de memória e um tempo de cálculo de 8h 59m 15.7s, para a sua execução sequencial.

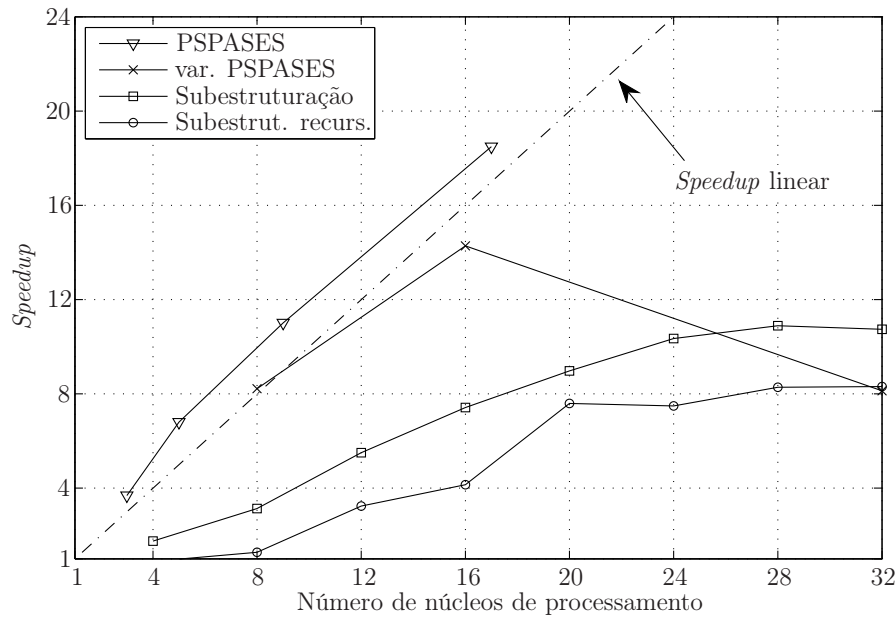


Figura 7.32: Teste I - *Speedup* total dos algoritmos paralelos

Neste grupo de análises, para além das implementações paralelas com base em métodos directos de resolução já utilizadas no teste antecedente, foi também testada a variante baseada no método de resolução híbrido FETI. No código desta última implementação não foi (até à data) contemplada a introdução de corpos rígidos no modelo. Esta limitação faz com que seja necessário modelar a sapata através de elementos deformáveis de elevada resistência, conduzindo a um aumento de 3.22% e 2.36% dos NGL globais e locais, respectivamente. Considera-se contudo que este aumento não é significativo, pelo que não inviabiliza ou prejudica uma análise comparativa com as restantes implementações. Outra peculiaridade da utilização da implementação FETI advém do facto da resolução do problema de minimização global ser efectuada de modo inexacto. Esta característica faz com o número de iterações para atingir a convergência do algoritmo de Uzawa possa diferir das restantes implementações, podendo mesmo conduzir a pequenas oscilações no resultado final. Para confirmar a afirmação anterior apresenta-se na Tabela 7.15, para as análises executadas com base no método de FETI, o número de iterações efectuadas pelo algoritmo de minimização, bem como o valor da solução obtida. São ainda apresentados valores de referência obtidos através de um método de resolução directa. Adicionalmente, indica-se o erro relativo entre as soluções do FETI e do método directo.

Tabela 7.15: Número de iterações e solução resultantes da aplicação do método de FETI

Método resolução	Número de <i>Slaves</i>	Número iteraões	Solução	
			valor	erro relativo
FETI	3	894	5.8841	+0.01%
FETI	7	875	5.8828	-0.02%
FETI	11	931	5.8808	-0.05%
FETI	15	872	5.8821	-0.03%
FETI	19	955	5.8811	-0.04%
FETI	23	922	5.8835	-0.01%
FETI	27	971	5.8798	-0.07%
FETI	31	954	5.8828	-0.02%
directo	-	719	5.8838	0.00%

À semelhança do que foi efectuado para o Teste I, apresenta-se, nos gráficos das Figuras 7.33 e 7.34, a evolução do tempo total de cálculo e do correspondente coeficiente de *Speedup* em função do número de núcleos de processamento, para todos os algoritmos testados. Note-se que os eixos das ordenadas apresentam a particularidade de utilizar duas escalas distintas. Este artifício é utilizado por forma a permitir uma melhor visualização dos resultados, destringendo as linhas referentes aos diferentes ensaios. Repete-se este mesmo tipo de informação nos gráficos das Figuras 7.35 e 7.36, agora em relação ao consumo médio de tempo por iteração do algoritmo de Uzawa. Finalmente, representa-se no gráfico da Figura 7.37 a evolução do consumo de tempo da fase inicial do processo de cálculo. Esta fase engloba, como principais tarefas, a montagem do sistema governativo da minimização global e respectiva factorização, parcial ou total.

A discriminação dos tempos parciais de execução, nomeadamente do tempo médio por iteração, permite, de algum modo, extrapolar os resultados obtidos independentemente das propriedades dos materiais. Efectivamente, o aumento do ângulo de atrito traduz-se num aumento do número de iterações do algoritmo de Uzawa, conforme constatado anteriormente. Assim, para estes últimos casos, é previsível um aumento do tempo do processo iterativo comparativamente ao comportamento aqui apresentado utilizando um material puramente coesivo, mantendo-se inalterado o tempo de execução da fase inicial. Mais, é possível balizar, sem grande rigor, o seu desempenho expectável, prevendo-se que o valor do coeficiente de *Speedup* total se

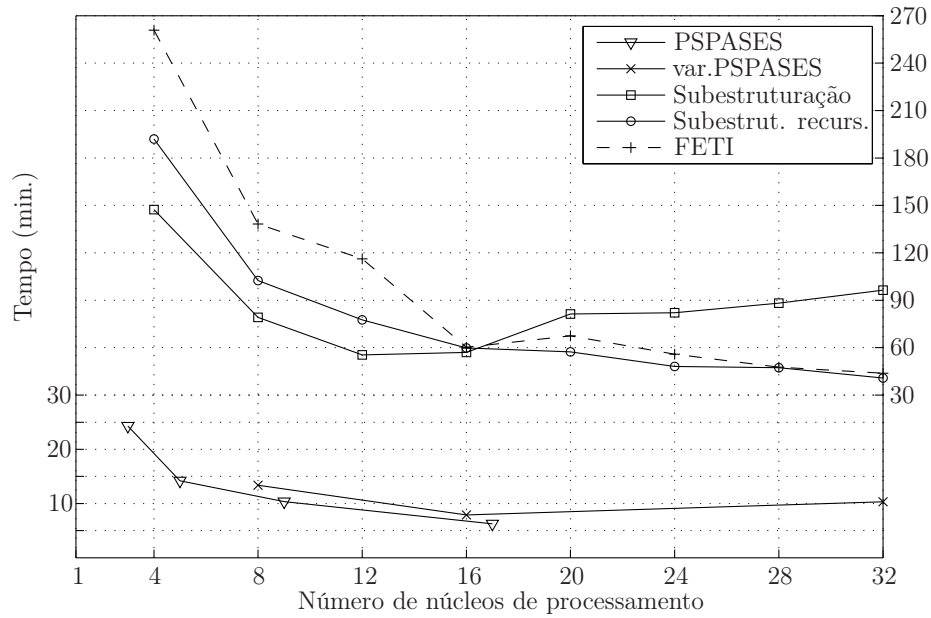


Figura 7.33: Teste II - tempo total de cálculo dos algoritmos paralelos

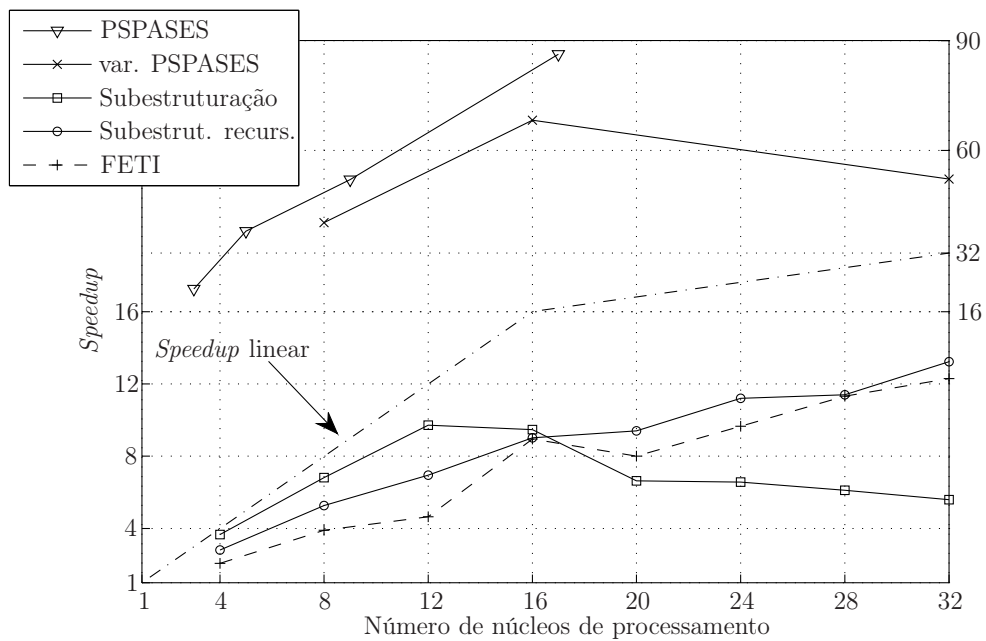


Figura 7.34: Teste II - Speedup total dos algoritmos paralelos

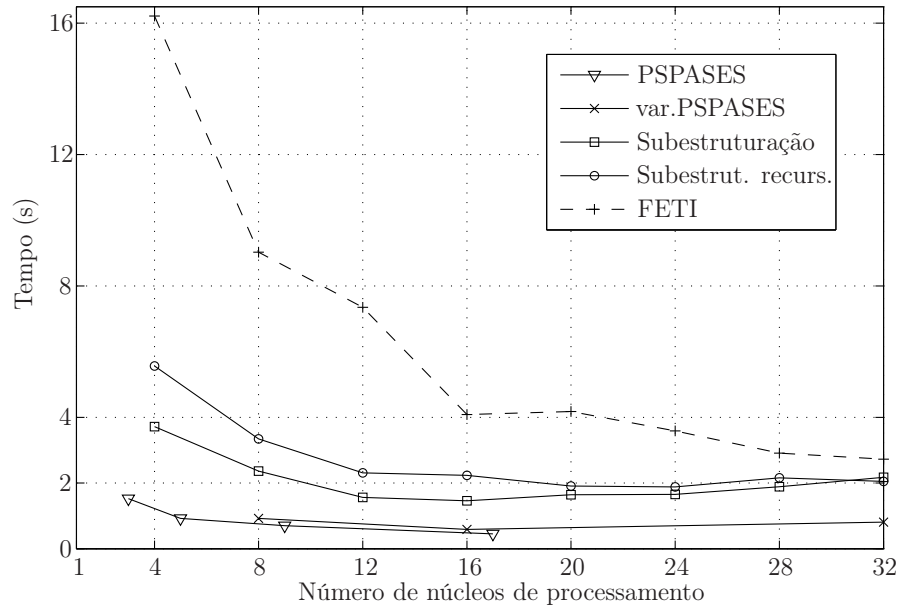


Figura 7.35: Teste II - tempo médio por iteração dos algoritmos paralelos

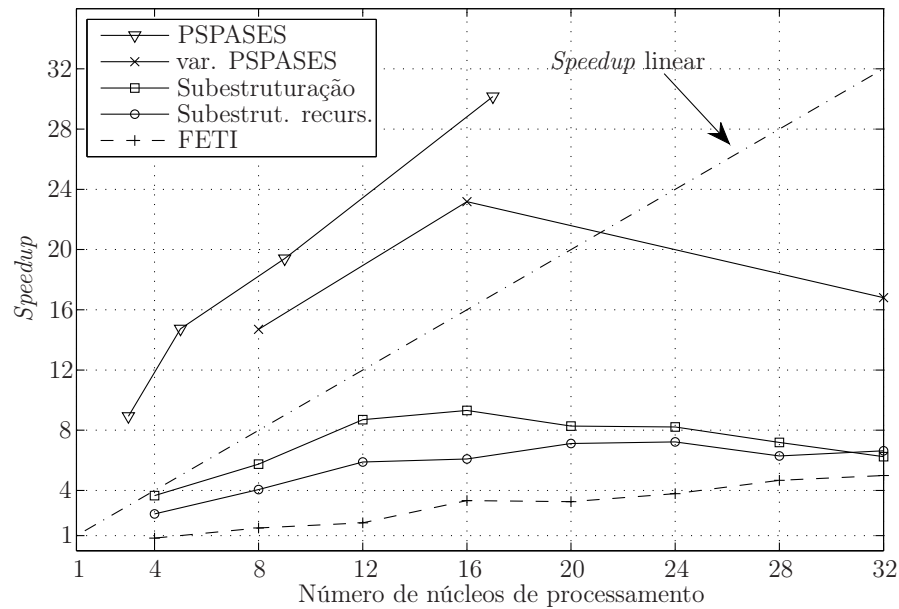


Figura 7.36: Teste II - *Speedup* do tempo médio por iteração dos algoritmos paralelos

encontre entre o actual valor e o valor do *Speedup* do tempo médio

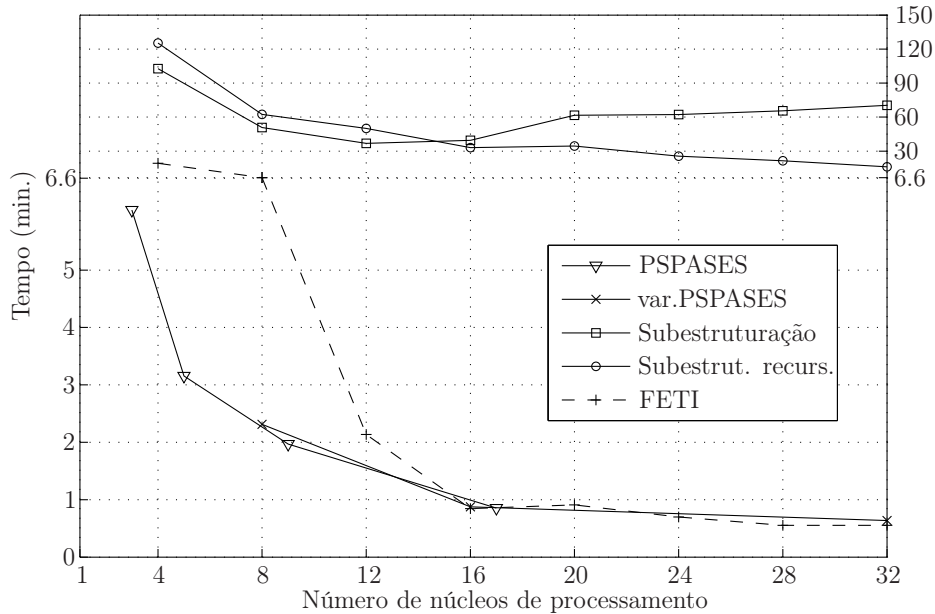


Figura 7.37: Teste II - consumo de tempo da fase inicial de montagem e factorização

7.2.3.3 Teste III

Neste derradeiro conjunto de ensaios utiliza-se novamente, para o cálculo do coeficiente N_c , a malha de 441504 elementos quadráticos, cujas características se encontram resumidas na Tabela 7.11.

Trata-se de um problema que, devido à sua grande dimensão, inviabiliza a sua execução através da implementação sequencial em resultado de limitações de memória. Pela mesma razão, não foi possível utilizar as implementações paralelas baseadas nos métodos de subestruturação e subestruturação recursiva. O próprio algoritmo PSPASES, a única das implementações baseada em métodos de resolução directos que superou as limitação da memória, esgotou praticamente os recursos de todas as máquinas que constituíam o *cluster*, ou seja, 16GB/máquina.

Na execução dos cálculos foi ainda testada a implementação baseada no algoritmo FETI. Salienta-se que, neste caso, a memória não constituiu um factor limitativo, não tendo sido necessário utilizar mais do que 2/3 dos recursos disponíveis. Refere-se ainda, que pelas mesmas razões expostas durante descrição do teste antecedente, a

aplicação desta última implementação conduz a um aumento de, respectivamente, 0.32% e 0.24% dos NGL globais e locais, sendo que a solução divergiu em +0.12% do valor apresentado na Tabela 7.12, obtido através de um método de resolução directa.

Contrariamente aos testes anteriores, não é possível aferir o desempenho da implementação paralela com base nos resultados do algoritmo sequencial. Em alternativa, introduz-se uma nova medida, a eficiência relativa, definida através da seguinte expressão:

$$E_{p/n} = \frac{t_n n}{t_p p} \quad (7.6)$$

onde t_n e t_p são os tempos de execução por n e p processadores, respectivamente, sendo $n \leq p$. Deste modo, um valor de eficiência relativa superior à unidade significa que o aumento do número de processadores se traduz num aumento do desempenho em relação à configuração de referência de n processadores.

Na Tabela 7.16 resumem-se os resultados obtidos para todas as situações estudadas no presente teste. Neste quadro são definidos, para além das parcelas correspondentes aos tempos de montagem e factorização, ao tempo médio por iteração e ao tempo total de execução, também valores correspondentes à eficiência relativa. Como termo de comparação, são ainda apresentados, para as mesmas situações, os resultados referentes aos testes anteriores para a implementação baseada no algoritmo PSPASES.

7.2.3.4 Discussão dos resultados

Para concluir esta secção procede-se a uma discussão dos resultados apresentados, procurando-se extrair as principais conclusões a reter quanto ao desempenho comparativo das diferentes implementações paralelas.

É notório constatar que, em qualquer dos casos analisados, a implementação baseada no algoritmo PSPASES foi aquela que apresentou, constante e inequivocamente, os melhores resultados. É ainda de sublinhar que, na situação em que o processo *Master* é atribuído a um processador independente, o algoritmo apresenta uma excelente escalabilidade. Contudo, esta vantagem fica comprometida na variante em que um processador acumula as tarefas de *Master* e de um dos *Slaves*.

Tabela 7.16: Resumo de resultados da análise do desempenho paralelo

Teste	Algoritmo	Número de núcleos de processamento	Tempo de cálculo			Eficiência relativa ($E_{p/9}$)		
			montagem e factorização	médio por iteração	total	montagem e factorização	médio por iteração	total
III	PSPASES	9	1h 51m 15.8s	5.52s	4h 08m 01.6s	1.00	1.00	1.00
	PSPASES	17	54m 26.6s	4.33s	2h 41m 40.8s	1.082	0.675	0.812
	var. PSPASES	32	50m 22.6s	4.18s	2h 33m 58.7s	0.621	0.371	0.453
	FETI	32	27m 13.4s	46.49s	13h 46m 42.8s	1.149	0.033	0.084
II	PSPASES	9	1m 58.2s	0.70s	10m 21.5s	1.00	1.00	1.00
	PSPASES	17	51.2s	0.45s	6m 15.0s	1.223	0.823	0.877
	var. PSPASES	32	38.1s	0.81s	10m 19.6s	0.872	0.243	0.282
I	PSPASES	9	21.1s	0.75s	20m 52.0s	1.00	1.00	1.00
	PSPASES	17	23.6s	0.44s	12m 25,8s	0.473	0.902	0.889
	var. PSPASES	32	40.2s	1.01s	28m 16.5s	0.147	0.209	0.208

Faz-se agora referência aos valores de *Speedup* superlineares registados nos gráficos da Figuras 7.32, 7.34 e 7.36. Estes valores, aparentemente anómalos, podem ser justificados por um desempenho menos satisfatório por parte do algoritmo de resolução directa proposto por Pissanetzky que é utilizado na implementação sequencial, já que o código da minimização local é comum a ambas as implementações, sequencial e paralela. De resto, este mesmo algoritmo é igualmente empregue nas implementações paralelas através dos métodos da subestruturação e da subestruturação recursiva. Este facto pode igualmente justificar alguma da falta de competitividade destas duas últimas implementações face à PSPASES.

Ainda em relação ao comportamento dos dois métodos de subestruturação constata-se duas fase distintas: uma fase inicial onde existe um decréscimo do tempo do cálculo com o aumento do número de núcleos de processamento, seguido de uma segunda fase onde se observa uma estagnação ou mesmo um ligeiro aumento do tempo de cálculo com o aumento do número de processadores. Esta perda de eficácia é mais notória para o método de subestruturação não recursivo. Note-se que o aumento do número *Slaves* se traduz, necessariamente, num aumento dos graus nas fronteiras entre sub-domínios. É o aumento excessivo deste tipo de graus de liberdade devido a uma grande subestruturação do domínio inicial que justifica a redução de desempenho mencionada. Para o método da subestruturação (não recursiva), este facto é particularmente penalizador já que o problema da interface é resolvido por um único processo, o *Master*, de forma sequencial.

A implementação baseada no método FETI é aquela que apresenta, para os problemas de maior dimensão, uma maior rapidez na fase inicial de cálculo, conforme se pode comprovar pelos valores da Tabela 7.16. Contudo, o facto da factorização do sistema governativo global só ser realizada parcialmente, sendo necessário recorrer a um algoritmo iterativo para obter a solução de cada minimização global, faz com que o tempo médio por iteração de Uzawa cresça significativamente. Conjugado com este facto, encontra-se o habitualmente elevado número de iterações necessário para atingir a convergência através do algoritmo de Uzawa. Assim, conclui-se que esta implementação de um método de resolução híbrido não se apresenta como uma alternativa competitiva face ao método de resolução directa PSPASES, para a presente formulação.

Por último, menciona-se que a utilização de uma resolução inexacta aquando da utilização do método FETI conforme descrito na secção 6.3.4.2, mostra-se capaz de

produzir bons resultados sem afectar significativamente a precisão da solução.

7.3 Ligações de perfis metálicos tubulares

Nesta secção é aplicada a formulação de análise limite desenvolvida na determinação da capacidade resistente de ligações de perfis metálicos tubulares de secção circular, CHS (sigla inglesa para *Circular Hollow Section*), quando solicitadas por uma acção estática.

7.3.1 Considerações iniciais

A utilização da Análise Limite como fundamento teórico de modelos desenvolvidos para a estimativa da capacidade resistente de ligações metálicas tubulares é uma abordagem que tem sido seguida por diversos investigadores. A comprovar esta afirmação encontram-se por exemplo os trabalhos de Packer et al. [102], Makino et al. [86] e Cao et al. [18], e, mais recentemente, os de Soh et al. [119], Zhao [134] e de Mashiri e Zhao [90]. Todos estes trabalhos têm como característica comum basearem-se em mecanismos definidos por linhas de rotura através de descontinuidades no campo das velocidades, deduzidos de forma analítica.

Contudo, a utilização estrita dos princípios inerentes à Análise Limite apresenta duas limitações que podem ser condicionantes consoante as características das ligações em jogo, concretamente, o diâmetro e espessura dos perfis. Estas limitações são a impossibilidade de considerar efeitos geometricamente não-lineares nas análises efectuadas e a nível do comportamento constitutivo do material a consideração de um comportamento perfeitamente elástico sem contemplar a possibilidade de existência de endurecimento (*hardening*). Não obstante, existem situações, em que este tipo de abordagem revela uma boa capacidade de prever a capacidade resistente de ligações tubulares [119].

Ressalva-se que, com a aplicação da ferramenta numérica desenvolvida na análise de ligações tubulares, não se pretende afirmar que para este tipo de problema, esta seja competitiva quando comparada com outras formulações alternativas desenvolvidas fora do âmbito da Análise Limite. Pretende-se, somente, prosseguir com a ilustra-

ção das grandes versatilidade e capacidade de cálculo disponibilizadas pelo método proposto e mostrar que este género de problema é susceptível de ser analisado, com um elevado grau de precisão, através de uma ferramenta numérica deste tipo.

7.3.2 Análise de duas ligações tubulares em K

O presente exemplo consiste na modelação numérica de dois ensaios experimentais seleccionados de um conjunto de ensaios conduzidos por Kurobane et al. [132]. Neste ensaios estudam-se duas ligações tubulares em forma de **K**, caracterizadas pela união de dois perfis secundários diagonais a um terceiro perfil considerado principal, usualmente de maior secção, denominado de corda. Este tipo de ligação é muito frequente em estruturas treliçadas metálicas.

Os dois ensaios aqui analisados diferem essencialmente na existência ou não de afastamento entre as diagonais, definido através do parâmetro geométrico g . Como se poderá constatar, este pormenor condicionará o tipo de rotura observado. Na Figura 7.38 esquematiza-se o pormenor da ligação.

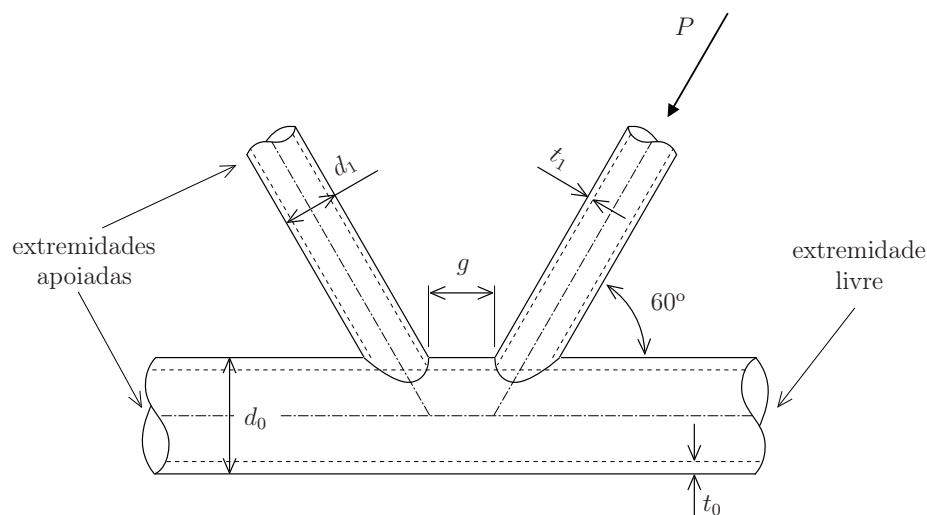


Figura 7.38: Representação de uma ligação tubular em K

Na Tabela 7.17, por sua vez definem-se os parâmetros geométricos, nomeadamente, o diâmetro, d , e a espessura, t , dos perfis e o afastamento, g , entre as diagonais, sendo que um valor negativo deste parâmetro representa a existência de sobreposição destes perfis na zona de ligação. Indicam-se, também, neste quadro os valores experimentais obtidos para a tensão de cedência dos perfis, σ_y , obtidos através de

dois ensaios preliminares distintos. No primeiro destes ensaios testam-se provetes constituídos por placas retiradas de cortes longitudinais dos perfis, sendo que no segundo se testam troços do perfil com a secção completa. A discrepância entre os valores obtidos através destes dois procedimentos pode-se considerar desprezável, não ultrapassando os 2.2% mesmo para os casos mais significativos. Por último, indica-se o valor registado para a carga máxima suportada por cada ligação durante o ensaio.

Tabela 7.17: Caracterização dos ensaios experimentais

Ensaio	Elemento	Parâmetros geométricos			Resultados experimentais		
		d (mm)	t (mm)	g (mm)	σ_y (MPa)		Carga máx. (kN)
					proвете	secção	
I	corda	216.1	7.9	-	478	476	922
	diagonais	165.0	5.28	-30.0	363	371	
II	corda	216.1	7.9	-	480	478	836
	diagonais	165.0	5.28	29.5	363	371	

Devido às condições de simetria do problema modelou-se apenas metade da estrutura, utilizando-se malhas não estruturadas de elementos quadráticos. Refira-se que a escolha da utilização de malhas não estruturadas foi condicionada pela geometria das peças. Optou-se também por utilizar malhas de elevado grau de refinamento por forma a garantir a obtenção de resultados de elevada precisão. Encontram-se sumarizados na Tabela 7.18 o número de elementos utilizados nas malhas de cada modelo analisado, bem como os respectivos números de graus de liberdade globais e locais. A título de exemplo, ilustra-se na Figura 7.39 uma das malhas utilizadas nos cálculos. Como se pode constatar, procedeu-se a uma concentração de elementos nas zonas da intercepção dos perfis onde era expectável uma maior concentração da dissipação plástica na formação do mecanismo de colapso.

Nos modelos numéricos não foram considerados nem os pormenores das soldaduras nem o peso próprio da estrutura. Salienta-se que esta última simplificação possibilita a modelação numa zona muito restrita da junção dos perfis, não afectando, contudo, o rigor da análise. Efectivamente, estima-se que o peso total de cada espécime ensaiado não atinja $1kN$, valor este irrisório comparativamente à ordem de grandeza das cargas de colapso.

O material foi modelado tendo por base o critério de von Mises, sendo o valor da

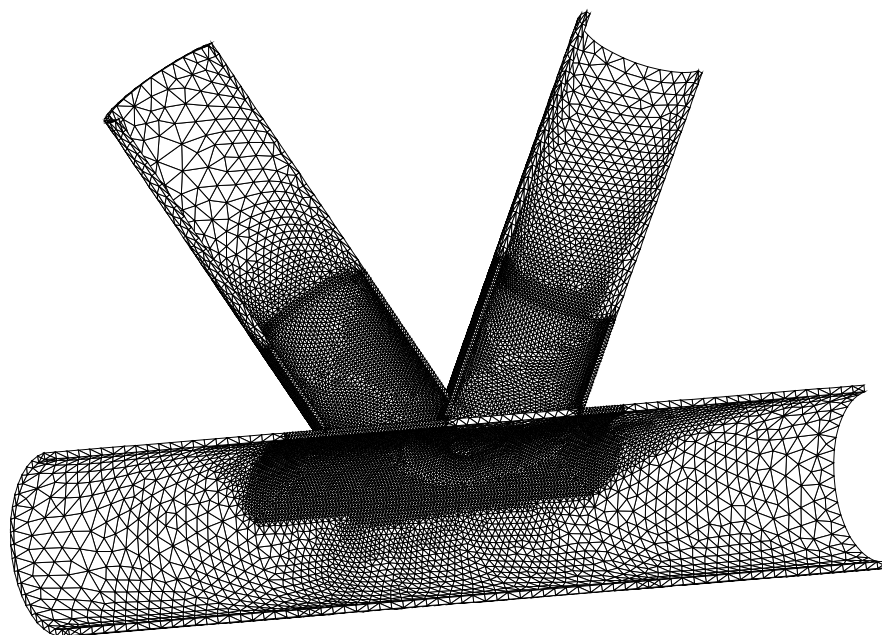


Figura 7.39: Malha tipo da ligação tubular em K

tensão de corte de cedência, k , dado por $\sigma_{ym}/\sqrt{3}$, em que σ_{ym} é a média das tensões de cedência experimentais indicadas na Tabela 7.17.

Devido à escassez de informação no relato experimental de [132], não é possível determinar como foi realizada a sobreposição das diagonais no modelo I. Assim, optou-se por estudar dois modelos distintos, identificados como I (a) e I (b), onde se consideram as duas possibilidades de sobreposição existentes: (a) a sobreposição da diagonal traccionada sobre a diagonal comprimida; (b) o caso contrário.

Nas últimas colunas da Tabela 7.18 encontram-se indicados os valores para as cargas de colapso obtidos através da análise numérica, juntamente com o valor do erro comparativo em relação aos resultados experimentais. Estes valores denotam uma boa concordância com os valores experimentais, validando, para o presente caso, as simplificações assumidas. Pode-se ainda afirmar que, mesmo a maior discrepância observada entre as cargas de colapso numéricas e experimentais, cerca de 10%, é um valor bastante aceitável tendo em consideração a dispersão usualmente registada nos valores experimentais para este tipo de ensaios [119]. Adicionalmente, a conformidade de resultados numéricos e experimentais permite alvitrar que a contribuição dos efeitos de não linearidade geométrica não tem uma importância tão significativa para o colapso da estrutura como pressupõem os autores dos ensaios experimentais

[132]. Salienta-se, por fim, a inocuidade da forma de sobreposição das diagonais no que concerne aos valores obtidos para a carga de colapso.

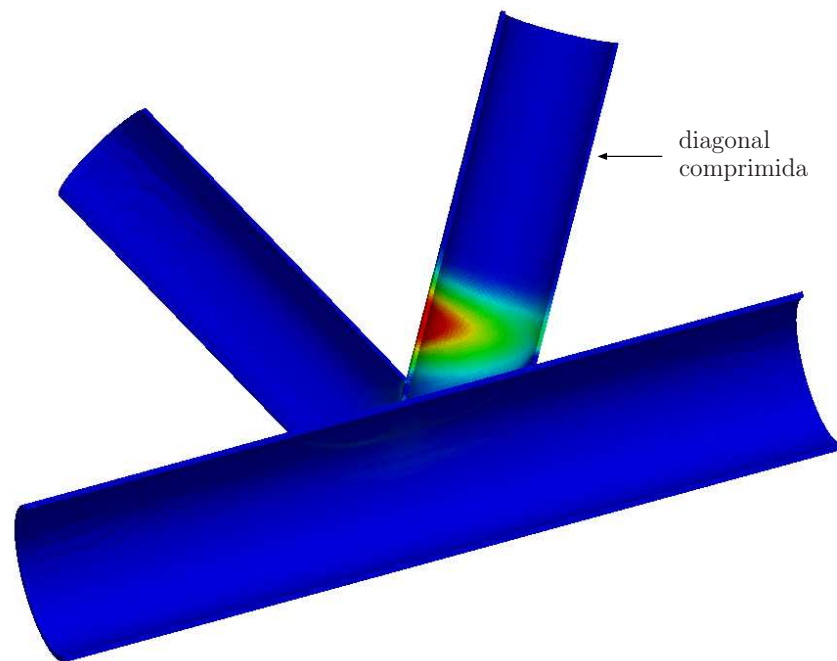
Tabela 7.18: Resumo dos valores da análise numérica

Modelo	Número de elementos	NDOF		Carga de colapso	
		globais	locais	valor (kN)	erro (%)
I (a)	101795	572127	1221540	958.6	3.97%
I (b)	101795	572133	1221540	951.1	3.16%
II	217801	649474	2613612	918.2	9.83%

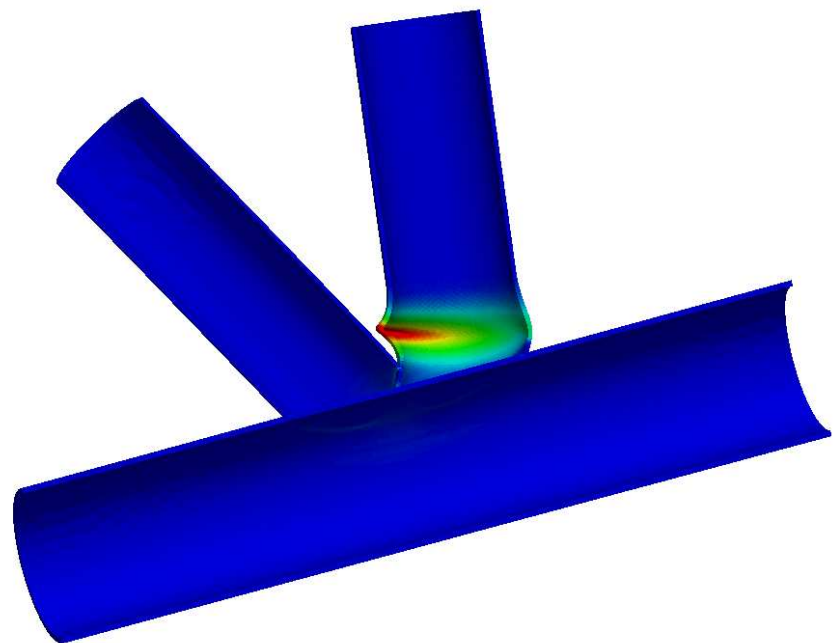
Nas Figuras 7.40, 7.41 e 7.42 são apresentadas as distribuições da dissipação plástica juntamente com as configurações dos mecanismos de colapso de todos os modelos analisados. Na Figura 7.41 é ainda apresentada a amplificação de um detalhe do mecanismo de colapso do modelo I (b), permitindo, desta forma, realçar a diferença deste modelo para o modelo I (a).

Um dos aspectos mais interessantes a reter dos mecanismos de colapso obtidos é a sua perfeita concordância com os modos de rotura descritos no relato experimental: (a) rotura por colapso da diagonal comprimida e (b) rotura por flexão da parede da corda. Adicionalmente, é de realçar o facto de ambos os mecanismos obtidos para o modelo I apresentarem uma semelhança notória com a imagem fotográfica, reproduzida na Figura 7.43, que documenta uma rotura do mesmo género, retirada de um caso pertencente ao mesmo conjunto de ensaios efectuados por Kurobane et al. [132].

No que concerne ao desempenho da formulação refere-se que a análise dos actuais problemas revelou uma convergência inesperadamente lenta, tanto mais que os modelos utilizavam um critério de cedência puramente coesivo, usualmente associado a um comportamento de convergência rápido. Aponta-se a utilização combinada de malhas não estruturadas e de um critério de cedência que força a existência de um escoamento plástico isocórico, ao que se acresce a geometria laminar de forma complexa, como factores que poderão ter contribuído para este comportamento menos satisfatório. Para tentar contrariar este comportamento, efectuou-se um aumento do valor inicial do parâmetro de penalidade, r , em 20 vezes. A melhoria da convergência em resultado desta acção foi significativa, conduzindo, contudo, a um ligeiro aumento da estimativa da carga de colapso. Este contratempo é, de resto, característico do comportamento do algoritmo de Uzawa aquando da utilização de parâmetros



(a) Dissipação Plástica



(b) Mecanismo de Colapso

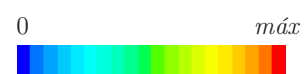


Figura 7.40: Solução da análise do modelo I (a)

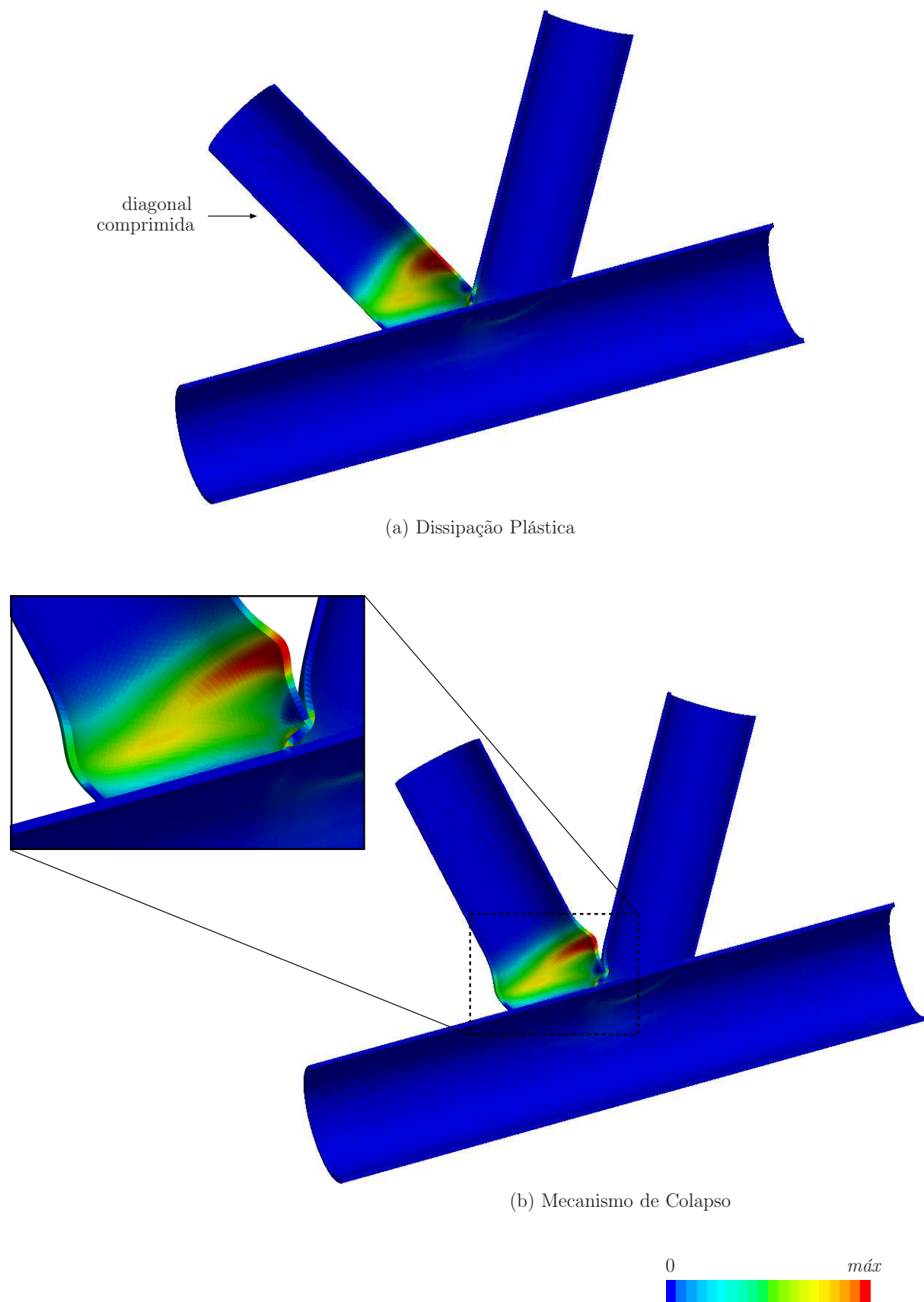
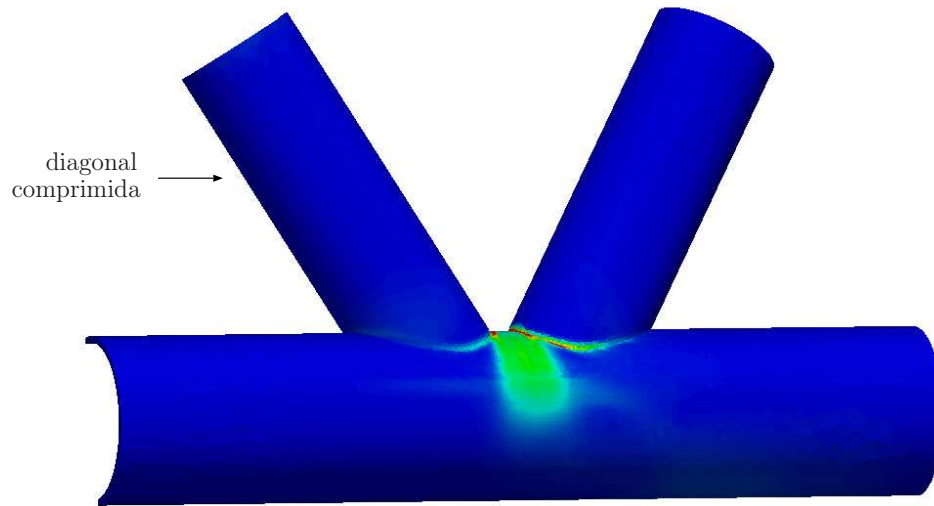
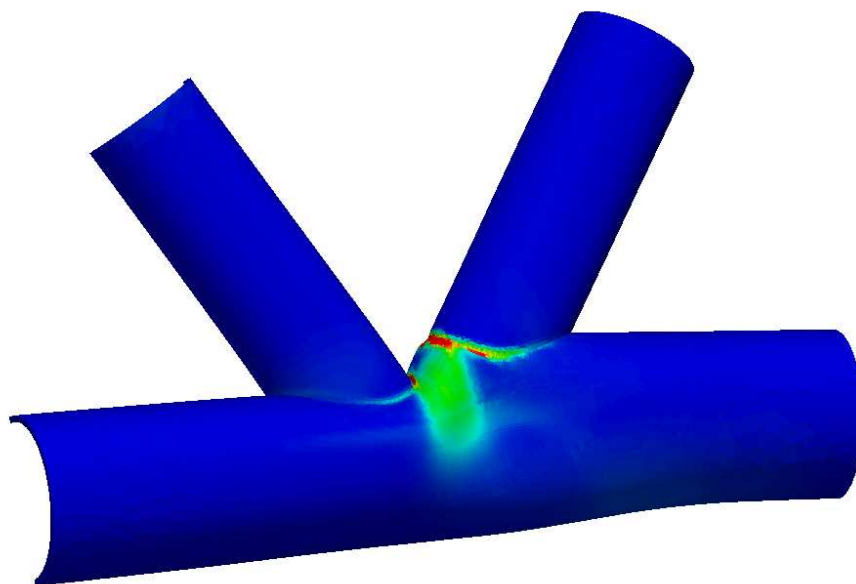


Figura 7.41: Solução da análise do modelo I (b)



(a) Dissipação Plástica



(b) Mecanismo de Colapso



Figura 7.42: Solução da análise do modelo II

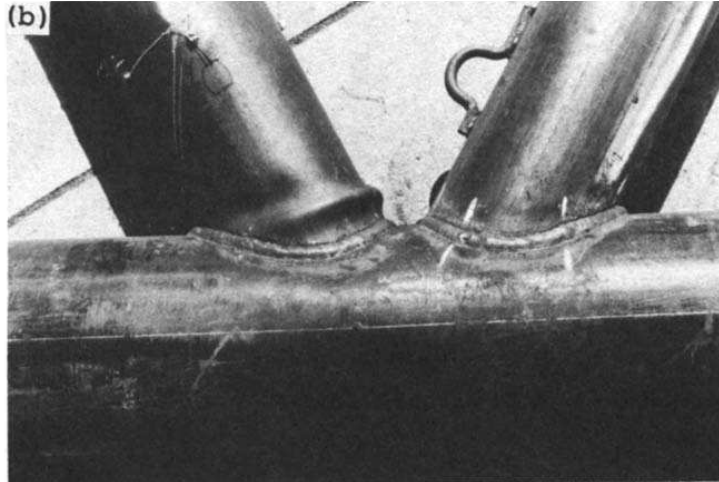


Figura 7.43: Colapso de uma ligação K originado na diagonal comprimida (retirado de Kurobane et al. [132])

de penalidade demasiado elevados [13]. Este relato revela também que a estratégia de escolha do valor inicial do parâmetro de penalização apresentada no final do Capítulo 4 embora se revele capaz de produzir bons resultados em inúmeros casos, não pode ser assumida como infalível.

De modo a substanciar os comentários anteriores, é apresentada na Tabela 7.19 a influência da escolha do parâmetro de penalidade inicial no tempo total de cálculo e no resultado final. Os tempos apresentados nesta tabela referem-se a cálculos efetuados com 9 núcleos de processamento através da implementação paralela baseada no algoritmo PSPASES.

Tabela 7.19: Resultados da influência do parâmetro de penalidade inicial

Modelo	Parâmetro de penalidade inicial	Tempo de cálculo (com 8 Slaves)	$\frac{P_u(r)}{P_u(r_0)}$
I (a)	$r_0=3.83 \times 10^{-3}$	23m 32.94s	1.0000
	$20 r_0$	7m 24.30s	1.0098
I (b)	$r_0=6.33 \times 10^{-3}$	43m 36.58s	1.0000
	$20 r_0$	7m 50.21s	1.0143
II	$r_0=8.04 \times 10^{-3}$	2h 18m 17.93s	1.0000
	$20 r_0$	37m 42.68s	1.0184

A informação anterior é ainda complementada com o gráfico da Figura 7.19 onde, para todos os casos considerados, é representada a evolução da solução em função

do número de iterações do algoritmo de Uzawa. Nas ordenadas, indica-se o valor da solução de forma normalizada, correspondendo o valor unitário ao valor final da solução. No eixo das abscissas indica-se, em escala logarítmica, o número de iterações.

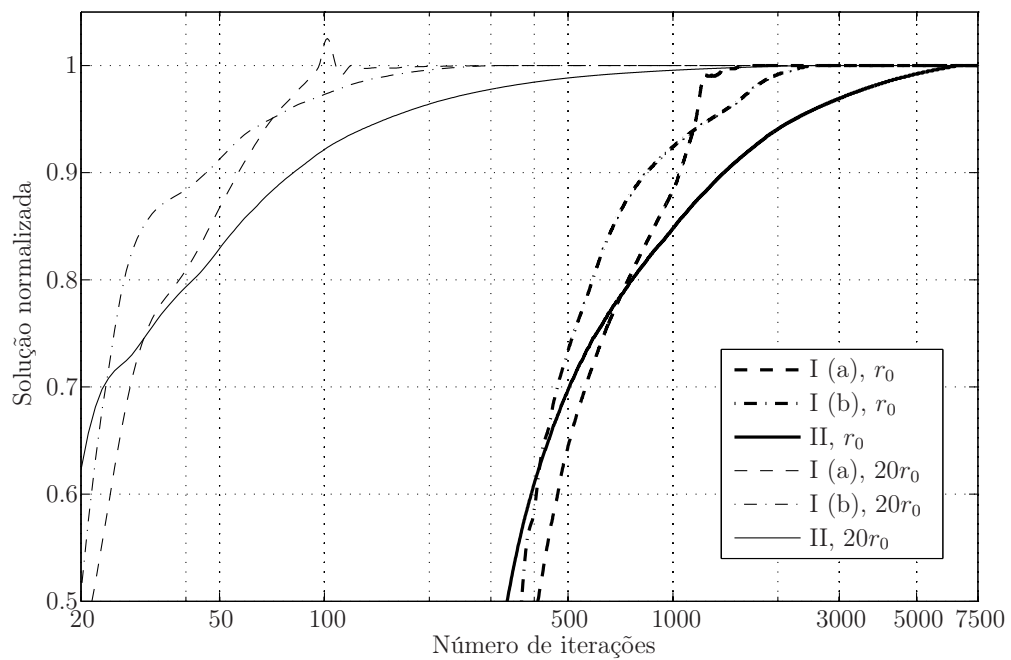


Figura 7.44: Influência do parâmetro de penalidade inicial na convergência do algoritmo de Uzawa

Capítulo 8

Conclusões e desenvolvimentos futuros

A obtenção e implementação de uma formulação de elementos finitos para Análise Limite consistiu no principal objectivo deste trabalho. A sua concretização culminou com o desenvolvimento de uma formulação baseada no Teorema Cinemático da Análise Limite, formulação esta resultante de uma evolução de modelos previamente existentes [9],[129].

Torna-se, conseqüentemente, conveniente recapitular de uma forma sumária os principais conceitos retidos das formulações iniciais que serviram como ponto de partida para alcançar a derradeira versão do modelo proposto.

Assim, é formulado um problema de optimização que minimiza a diferença entre a potência das forças aplicadas e a dissipação plástica para um dado parâmetro de carga. Este problema é sujeito a restrições que garantem a admissibilidade cinemática das soluções obtidas. Recorrendo ao Teorema Cinemático, é possível retirar conclusões quanto à capacidade da estrutura suportar o carregamento associado ao parâmetro de carga estudado.

O problema pode agora ser discretizado em elementos finitos isoparamétricos, utilizando funções de forma nodais lineares para interpolar o campo das velocidades. Por sua vez, para o campo da taxa de deformação considera-se ainda uma segunda aproximação, assumindo-o como constante em cada elemento. Esta relação adoptada para os graus dos diferentes campos aproximados é essencial para garantir a

obtenção de uma formulação dita forte.

A compatibilidade entre os campos supramencionados é imposta recorrendo ao método do Lagrangeano Aumentado, mediante a introdução da respectiva condição de compatibilidade na função objectivo. Esta condição é adicionalmente reforçada através de um termo quadrático de penalidade.

A resolução do problema de minimização não linear formulado processa-se através de uma variante do algoritmo iterativo de Uzawa com relaxação. Realça-se novamente a importante vantagem decorrente da introdução no algoritmo de Uzawa de uma etapa de relaxação, permitindo que a não linearidade do problema possa ser tratada localmente ao nível local do elemento.

Finalmente, e para determinar o melhor majorante do parâmetro de carga de colapso susceptível de ser obtido com a discretização adoptada, torna-se necessário combinar a formulação descrita com um algoritmo de pesquisa do parâmetro de carga, como o que se encontra ilustrado na Figura 4.2.

Por forma a melhorar o desempenho e alargar as capacidades de cálculo do modelo existente foram propostas modificações, consistindo estas nas contribuições originais deste trabalho. Procede-se, em seguida, à síntese destas modificações, tecendo-se breves comentários sobre as vantagens delas decorrentes:

- Introdução na função objectivo de um termo que normaliza a taxa do trabalho produzido pelas forças variáveis, através do método dos multiplicadores de Lagrange. Esta medida permite extrair directamente da solução do problema de minimização uma estimativa do parâmetro de carga de colapso, tornando-se desnecessária a utilização de um algoritmo adicional de pesquisa do parâmetro de carga. Tal traduz-se numa diminuição apreciável dos custos computacionais e, conseqüentemente, do tempo de cálculo requerido.
- Definição de uma estratégia para estimar o valor inicial óptimo do parâmetro de penalidade, r , e de um procedimento para a sua actualização no decorrer do processo iterativo do algoritmo de Uzawa. Esta modificação, por sua vez, reflecte-se no desempenho do algoritmo, originando um aumento na sua velocidade de convergência.
- Imposição das restrições do problema de minimização de uma forma local,

em detrimento de uma forma ponderada. Este facto revela-se de importância capital ao permitir o aumento dos graus das funções de aproximação de uma forma expedita, sem prejudicar o carácter forte da formulação.

- Introdução de elementos com aproximações quadráticas para o campo das velocidades e, portanto, lineares para as taxas de deformação. A utilização destes elementos reduz a sensibilidade da formulação a fenómenos de *locking*. Adicionalmente, a utilização destes elementos para malhas de baixa e média densidade, melhora a relação entre os graus de liberdade utilizados e a qualidade dos resultados obtidos.
- Introdução de descontinuidades no campo de velocidades do modelo, sugerindo-se duas abordagens distintas. Na primeira, uma variante Híbrida-Mista da formulação é desenvolvida adicionando-se uma aproximação para o campo das velocidades relativas entre fronteiras de elementos adjacentes. Na segunda abordagem investigada, as descontinuidades são modeladas através de elementos degenerados de espessura nula. A possibilidade de existência de descontinuidades no modelo torna mais fácil a obtenção de *boas* estimativas de colapso para problemas cujas soluções apresentem singularidades muito localizadas nos mecanismos. Acrescenta-se ainda que, ao introduzirem graus de liberdade adicionais nas interfaces dos elementos, as descontinuidades também contrariam o aparecimento de fenómenos de *locking*.
- Paralelização do modelo. Aplicaram-se técnicas de processamento paralelo para a implementação da formulação, dando particular relevo ao estudo de diversas alternativas para o método de resolução em paralelo do sistema governativo da minimização global. Esta etapa é considerada crítica, já que a sua implementação em paralelo é a que mais condiciona o desempenho global do modelo. O modelo paralelo revela uma boa escalabilidade confirmando a adequabilidade, previsível, da formulação para este tipo de abordagem. A obtenção de cargas de colapso de elevada precisão está inevitavelmente associada a custos computacionais elevados. A computação paralela representa uma boa solução para contornar este problema, ao repartir a carga computacional pelas diversas máquinas envolvidas nos cálculos.

Adicionalmente, e ainda com a formulação inicial, procedeu-se ao estudo do comportamento do algoritmo de Uzawa, face à existência de soluções múltiplas óptimas

para o problema de minimização¹. Esta análise permitiu identificar condições de optimalidade para parâmetros de carga incapazes de produzir mecanismos de colapso. Com base nestas condições, obteve-se uma formulação alternativa à existente. É interessante verificar que este novo modelo, obtido a partir desta abordagem e, consequentemente, sem evocar quaisquer princípios matemáticos de dualidade, resulta efectivamente numa formulação discreta do Teorema Estático.

Para concluir a enumeração das contribuições introduzidas no modelo refere-se que, e embora não constituísse um objectivo essencial deste trabalho, se procedeu à implementação de um algoritmo de minimização local adequado ao critério de cedência de Drucker-Prager.

Os testes numéricos apresentados no Capítulo 7 ilustram a enorme capacidade de cálculo do modelo desenvolvido, tendo sido possível executar análises com malhas constituídas por mais de 1.8 milhões de graus de liberdade globais e de 5 milhões de graus de liberdade locais. Este número ganha particular relevo quando comparado com trabalhos de outros autores que, limitados por estratégias sequenciais, relatam a utilização de malhas com um número significativamente mais reduzido de graus de liberdade. A possibilidade de recorrer a malhas com estes níveis de refinamento reflecte-se necessariamente na excelente qualidade dos resultados obtidos. De facto, os resultados dos exemplos 3D analisados superam invariavelmente os melhores valores encontrados, à data, na literatura técnica.

8.1 Desenvolvimentos futuros

Em jeito de conclusão enuncia-se um conjunto de tópicos que se considera interessantes, pretendendo-se explorá-los em trabalhos futuros.

Efectivamente e apesar dos bons resultados obtidos, não se considera esgotado o desenvolvimento do modelo de cálculo apresentado. Neste âmbito, destacam-se alguns aspectos que se consideram dignos de uma atenção especial no futuro.

Eleito como tópico primordial encontra-se a melhoria da velocidade de convergência do algoritmo de Uzawa. Este é um assunto que continua ainda hoje a interessar

¹É de salientar que esta multiplicidade é eliminada mediante a aplicação da primeira modificação referida anteriormente.

igualmente a Comunidade Matemática. Observam-se bastantes trabalhos que versam o desenvolvimentos de algoritmos para a solução de problemas de ponto sela, sendo por isso necessário estar atento a novos desenvolvimentos nesta área e estudar a possibilidade de adaptar estes novos algoritmos ao modelo aqui apresentado.

Existe também ainda trabalho a realizar na utilização de métodos de resolução de sistemas de equação em paralelo. Nomeadamente, considera-se interessante estudar a introdução de preconditionadores para o método FETI.

A estratégia utilizada no modelo para resolver o aspecto da não linearidade associada ao problema de Análise Limite, transformando-o num problema local, pode constituir uma mais valia na modelação de materiais com critérios de cedência complexos. Assim, seria interessante investigar a adequabilidade do modelo a materiais ortotrópicos.

Outro assunto sempre presente ao longo do desenvolvimento deste trabalho é a adaptividade. Encontram-se já analisadas com detalhe as estratégias propostas por outros autores e foram já realizados alguns testes preliminares de critérios e técnicas adaptativas. Há, contudo, ainda um grande trabalho a desenvolver até se conseguir obter uma estratégia satisfatória. Contudo, a mais-valia espectável da utilização de técnicas adaptativas eleger este tópico como um dos assuntos mais prementes a explorar num futuro próximo.

Estabeleceu-se como objectivo deste trabalho produzir uma formulação de limite superior forte. Assim, considera-se interessante investigar o desempenho de uma variante do modelo misto apresentado, desenvolvida a partir da imposição ponderada das condições de admissibilidade cinemática. O confronto do desempenho entre a formulação fraca assim obtida e a formulação forte original trará certamente resultados dignos de interesse.

Outra extensão natural deste trabalho é a aplicação da abordagem utilizada, recorrendo alternativamente a elementos de tensão, de modo a obter uma formulação de limite inferior.

8.2 Nota final

Ante o exposto neste documento, considera-se que esta tese representa um contributo que se considera corresponder a um avanço no desenvolvimento de modelos numéricos para Análise Limite. Cabe agora tirar partido da ferramenta numérica disponibilizada e da sua elevada capacidade de cálculo na resolução de problemas de aplicação prática na área da Engenharia Civil.

Bibliografia

- [1] A.J. Abbo e S.W. Sloan: *A smooth hyperbolic approximation to the Mohr-Coulomb yield criterion*. Computers and Structures, 54(3):427–441, 1995.
- [2] R. Aceti, G. Ballio, A. Capsoni, e L. Corradi: *A limit analysis study to interpret the ultimate behavior of bolted joints*. Journal of Constructional Steel Research, 60(9):1333–1351, 2004.
- [3] R. Aceti, A. Capsoni, e L. Corradi: *A 3D finite element with planar symmetry for limit analysis computations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194:1823–1838, 2005.
- [4] M. Al-Nasra e D. T. Nguyen: *An algorithm for Domain Decomposition in Finite Element Analysis*. Computers & Structures, 39(3-4):277–289, 1991.
- [5] P.R. Amestoy, I.S. Duff, J. Y. L’Excellent, e J. Koster: *MUMPS: A General Purpose Distributed Memory Sparse Solver*. In *PARA 2000: Proceedings of the 5th International Workshop on Applied Parallel Computing, New Paradigms for HPC in Industry and Academia*, páginas 121–130, Bergen, Norway, 2000. Springer.
- [6] E. Anderheggen e H. Knöpfel: *Finite element limit analysis using linear programming*. International Journal of Solids and Structures, 8:1413–1431, 1972.
- [7] K.D. Andersen e E. Christiansen: *Limit analysis with the dual affine scaling algorithm*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 59(2):233–243, 1995.
- [8] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, e D. Sorensen: *LAPACK Users’ Guide*. SIAM, 3ª edição, 1999.

- [9] A. Antão: *Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée*. Tese de Doutorado, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [10] E.R. Arantes e Oliveira: *Elementos da teoria da elasticidade*, volume 6 de *Ensino da Ciência e da Tecnologia*. IST Press, 1999.
- [11] C.E. Augarde, A.V. Lyamin, e S.W. Sloan: *Prediction of Undrained Sinkhole Collapse*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering (ASCE), 129(3):197–205, 2003.
- [12] C.E. Augarde, A.V. Lyamin, e S.W. Sloan: *Stability of an undrained plane strain heading revisited*. Computers and Geotechnics, 30:419–430, 2003.
- [13] D.P. Bertsekas: *Constrained optimization and lagrange multiplier methods*. Academic Press, inc., 1982.
- [14] L.S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, I. Duff, S. Hammarling, G. Henry, M. Heroux, L. Kaufman, A. Lumsdaine, A. Petitet, R. Pozo, K. Remington, e R.C. Whaley: *An updated set of basic linear algebra subprograms (BLAS)*. ACM Transactions on Mathematical Software, 28(2):135–151, 2002.
- [15] L. Borges, N. Zouain, C. Costa, e R. Feijóo: *An adaptive approach to limit analysis*. International Journal of Solids and Structures, 38(10-13):1707–1720, 2001.
- [16] R. de Borst e E.A.A Groen: *Some observations on element performance in isochoric and dilatant plastic flow*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38:2887–2906, 1995.
- [17] A. Bottero, R. Negre, J. Pastor, e S. Turgeman: *Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 22(1):131–149, 1980.
- [18] J.J. Cao, J.A. Packer, e G.J. Yang: *Yield line analysis of RHS connections with axial loads*. Journal of Constructional Steel Research, 48(1):1–25, 1998.
- [19] Z. H. Cao: *Fast Uzawa algorithm for generalized saddle point problems*. Applied Numerical Mathematics, 46:157–171, 2003.

- [20] A. Capsoni e L. Corradi: *A finite element formulation of the rigid-plastic limit analysis problem*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(11):2063–2086, 1997.
- [21] A. Capsoni e L. Corradi: *Limit analysis of plates - a finite element formulation*. Structural Engineering and Mechanics, 8(4):325–341, 1999.
- [22] A. Cavicchi e L. Gambarotta: *Two-dimensional finite element upper bound limit analysis of masonry bridges*. Computers and Structures, 84:2316–2328, 2006.
- [23] A. Cavicchi e L. Gambarotta: *Lower bound limit analysis of masonry bridges including arch-fill interaction*. Engineering Structures, 29:3002–3014, 2007.
- [24] A. Cecchi e G. Milani: *A kinematic FE limit analysis model for thick English bond masonry walls*. International Journal of Solids and Structures, 45:1302–1331, 2008.
- [25] CEN: *Eurocode 7: geotechnical design - part 1: general rules. European Prastandard ENV 1997-1*. CEN (Comité Européen de Normalisation), Brussels, 2001.
- [26] J. Chakrabarty: *Theory of plasticity*. Engineering mechanics series. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [27] W.F. Chen: *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill, 1982.
- [28] W.F. Chen e X.L. Liu: *Limit Analysis in Soil Mechanics*. Developments in Geotechnical Engineering, 52. Elsevier, 1990.
- [29] Z. Chen, X. Wang, C. Haberfield, J.H. Yin, e Y. Wang: *A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem. Part I: theory and methods*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 38(3):369–378, 2001.
- [30] E. Christiansen: *Computation of limit loads*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 17(10):1547–1570, 1981.
- [31] E. Christiansen: *Limit Analysis of Collapse States*. In P.G. Ciarlet e J.L. Lions (editores): *Handbook of Numerical Analysis (Part 2)*, volume IV, páginas 193–312. North-Holland, 1996.

- [32] E. Christiansen e O.S. Pedersen: *Automatic mesh refinement in limit analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50(6):1331–1346, 2001.
- [33] H. Ciria, J. Peraire, e J. Bonet: *Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 75(8):899–944, 2008.
- [34] A.D. Cox, G. Eason, e H.G. Hopkins: *Axially symmetric plastic deformation in soils*. Philosophical Transactions of Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 254(1036):1–45, 1961.
- [35] R.O. Davis e A.P.S. Selvadurai: *Plasticity and Geomechanics*. Cambridge University Press, 2002.
- [36] Z. Dostál, D. Horák, e V. Kučera: *Total FETI - an easier implementable variant of the FETI method for numerical solution of elliptic PDE*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 22(12):1155–1162, 2006.
- [37] A. Drescher e E. Detournay: *Limit load in translational failure mechanisms for associative and non-associative materials*. Geotechnique, 43(3):443–446, 1993.
- [38] I.S. Duff e J.K. Reid: *The Multifrontal Solution of Indefinite Sparse Symmetric Linear*. ACM Transactions on Mathematical Software, 9(3):302–325, 1983.
- [39] C. Farhat: *A lagrange multiplier based divide and conquer finite element algorithm*. Computing Systems in Engineering, 2(2/3):149–156, 1991.
- [40] C. Farhat, P. S. Chen, J. Mandel, e F. X. Roux: *The two-level FETI method Part II: Extension to shell problems, parallel implementation and performance results*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 155:153–179, 1998.
- [41] C. Farhat e M. Géradin: *On the general solution by a direct method of a large-scale singular system of linear equations: application to the analysis of floating structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 41(4):675–696, 1998.

- [42] C. Farhat, M. Lesoinne, P. LeTallec, K. Pierson, e D. Rixen: *FETI-DP: a dual-primal unified FETI method - part I: A faster alternative to the two-level FETI method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50(7):1523–1544, 2001.
- [43] C. Farhat e J. Mandel: *The two-level FETI method for static and dynamic plate problems Part I: An optimal iterative solver for biharmonic systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 155:129–151, 1998.
- [44] C. Farhat e F. X. Roux: *A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32(6):1205–1227, 1991.
- [45] F.A. Gaydon e A.W. McCrum: *A theoretical investigation of the yield-point loading of a square plate with a central circular hole*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 2:156–169, 1954.
- [46] M. Gilbert, C. Casapulla, e H.M. Ahmed: *Limit analysis of masonry block structures with non-associative frictional joints using linear programming*. Computers and Structures, 84:873–887, 2006.
- [47] R. Glowinski e P. Le Tallec: *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. SIAM, Philadelphia, 1989.
- [48] S. Gourvenec, M. Randolph, e O. Kingsnorth: *Undrained Bearing Capacity of Square and Rectangular Footings*. International Journal of Geomechanics, 6(3):147–157, 2006.
- [49] J. Groß-Weege: *On the numerical assessment of the safety factor of elastic-plastic structures under variable loading*. International Journal of Mechanical Sciences, 39(4):417–433, 1997.
- [50] T. Guennouni e P. Le Tallec: *Calcul à la rupture: régularisation de Norton-Hoff et Lagrangien Augmenté*. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 2(2):75–99, 1982.
- [51] A. Gupta, F. Gustavson, M. Joshi, G. Karypis, e V. Kumar: *PSPASES: An Efficient and Scalable Parallel Sparse Direct Solver*. 1999. URL <http://www-users.cs.umn.edu/~mjoshi/pspases/>.

- [52] A. Gupta, G. Karypis, e V. Kumar: *Highly Scalable Parallel Algorithms for Sparse Matrix Factorization*. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 8(5):502–520, 1997.
- [53] M. Heitzer: *Plastic limit loads of defective square plates*. Engineering Fracture Mechanics, 71:1951–1969, 2004.
- [54] M. Heitzer e M. Staat: *Basis reduction technique for limit and shakedown problems*. In *Numerical Methods for Limit and Shakedown Analysis, Deterministic and Probabilistic Problems*, páginas 1–51. John von Neuman Institute for Computing (NIC), NIC Series volume 15, 2002.
- [55] J. Heyman: *The stone skeleton*. International Journal of Solids and Structures, 2:249–279, 1966.
- [56] R. Hill: *The Mathematical Theory of Plasticity*. The Oxford engineering science series. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [57] R. Hill: *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1(1):19–30, 1952.
- [58] M. Hjjaj, A.V. Lyamin, e S.W. Sloan: *Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor N_γ* . International Journal of Solids and Structures, 42(5-6):1681–1704, 2005.
- [59] T.J.R. Hughes: *Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [60] A.P. Jensen: *Limit analysis of gusset plates in steel single-member welded connections*. Journal of Constructional Steel Research, 62(1-2):144–150, 2006.
- [61] G.L. Jiang: *Non linear finite element formulation of kinematic limit analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38:2775–2807, 1995.
- [62] M. Joshi, G. Karypis, V. Kumar, A. Gupta, e F. Gustavson: *PSPASES: Scalable Parallel Direct Solver Library for Sparse Symmetric Positive Definite Linear Systems - User's Manual (version 1.0.3)*. University of Minnesota, 1999. URL <http://www-users.cs.umn.edu/~mjoshi/pspases>.

- [63] L.M. Kachanov: *Foundations of the Theory of Plasticity*. North-Holland, 1996.
- [64] G. Karypis e V. Kumar: *MeTiS A Software Packade for Partitioning Unstructured Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill-Reducing Ordering of Sparse Matrices. Version 4.0*. University of Minnesota, Department of Computer Science / Army HPC Research Center, 1998. URL <http://www.cs.umn.edu/~karpis>.
- [65] J.H. Kim e S.J. Kim: *Multifrontal Solver Combined with Graph Partitioners*. AIAA Journal, 37:964–970, 1999.
- [66] J.H. Kim, C.S. Lee, e S.J. Kim: *Development of a High-performance Domain-wise Parallel Direct Solver for Large-scale Structural Analysis*. In *Proceedings of the Seventh International Conference on High Performance Computing and Grid in Asia Pacific Region (HPCAsia'04)*, 2004.
- [67] J.H. Kim, C.S. Lee, e S.J. Kim: *High-performance Domain-wise Parallel Direct Solver for Large-scale Structural Analysis*. AIAA Journal, 43(3):662–670, 2005.
- [68] S.J. Kim, C.S. Lee, e J.H. Kim: *Large-Scale Structural Analysis by Parallel Multifrontal Solver Through Internet-Based Personal Computers*. AIAA Journal 2002, 40(2):359–367, 2002.
- [69] K. Krabbenhøft, A. Lyamin, M. Hjiaj, e S.W. Sloan: *A new discontinuous upper bound limit analysis formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 63:1069–1088, 2005.
- [70] K. Krabbenhøft, A. Lyamin, e S.W. Sloan: *Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs*. International Journal of Solids and Structures, 44:1533–1549, 2007.
- [71] K. Krabbenhøft, A. Lyamin, e S.W. Sloan: *Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 24(11):1107–1119, 2008.
- [72] P. Le Tallec: *Numerical Solution of Viscoplastic Flow Problems by Augmented Lagrangians*. IMA Journal of Numerical Analysis, 6(2):185–219, 1986.
- [73] M.M.K. Lee e S.R. Wilmshurst: *Numerical Modelling of CHS Joints with Multiplanar Double-K Configuration*. Journal of Constructional Steel Research, 32(3):281–301, 1995.

- [74] H.X. Li e H.S. Yu: *Kinematic limit analysis of frictional materials using nonlinear programming*. International Journal of Solids and Structures, 42:4058–4076, 2005.
- [75] X.S. Li: *An overview of SuperLU: Algorithms, implementation, and user interface*. ACM Transactions on Mathematical Software, 31(3):302–325, 2005.
- [76] Y. Lin e Y. Cao: *A new nonlinear Uzawa algorithm for generalized saddle point problems*. Applied Mathematics and Computation, 175:1432–1454, 2006.
- [77] Y. Liu, X. Zhang, e Z. Cen: *Numerical determination of limit loads of three-dimensional structures using boundary element method*. European Journal of Mechanics, A/Solids, 23:127–138, 2004.
- [78] V.A. Lubarda: *Elastoplasticity theory*. CRC Press, 2002.
- [79] J. Lubliner: *The Theory of Plasticity*. Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
- [80] A.V. Lyamin, K. Krabbenhøft, S.W. Sloan, e M. Hjiaj: *An adaptive algorithm for upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields*. In P. Neittaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Oñate, J. Périaux, e D. Knörzer (editores): *Proceedings of the ECCOMAS 2004, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Jyväskylä, Finland, 2004.
- [81] A.V. Lyamin, R. Salgado, S.W. Sloan, e M. Prezzi: *Two- and three-dimensional bearing capacity of footings in sand*. Géotechnique, 57(8):647–662, 2007.
- [82] A.V. Lyamin e S.W. Sloan: *Lower bound limit analysis using nonlinear programming*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 55(5):573–611, 2002.
- [83] A.V. Lyamin e S.W. Sloan: *Upper bound limit analysis using linear finite elements and nonlinear programming*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 26(2):181–216, 2002.
- [84] A.V. Lyamin, S.W. Sloan, K. Krabbenhøft, e M. Hjiaj: *Lower bound limit analysis with adaptive remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 63:1961–1974, 2005.

- [85] J. Lysmer: *Limit Analysis of Plane Problems in Soil Mechanics*. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 96:1311–1334, 1970.
- [86] Y. Makino, Y. Kurobane, e T. Tozaki: *Ultimate strength analysis of simple CHS joints using the yield line theory*. In *Proceedings of the Third International Symposium on Tubular Structures*, páginas 147–153, Lappeenranta, Finland, 1989.
- [87] A. Makrodimopoulos e C.M. Martin: *Limit analysis using large-scale SOCP optimization*. In *13th acme conference: University of Sheffield*, 2005.
- [88] A. Makrodimopoulos e C.M. Martin: *Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66(4):604–634, 2006.
- [89] A. Makrodimopoulos e C.M. Martin: *Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 31:835–865, 2007.
- [90] F.R. Mashiri e X. L. Zhao: *Plastic mechanism analysis of welded thin-walled T-joints made up of circular braces and square chords under in-plane bending*. Thin-Walled Structures, 42:759–783, 2004.
- [91] R.L. Michalowski: *Upper-bound load estimates on square and rectangular footings*. Géotechnique, 51(9):787–798, 2001.
- [92] R.L. Michalowski e E.M. Dawson: *Three-dimensional analysis of limit loads on Mohr-Coulomb soil*. Foundations of Civil and Environmental Engineering, 1:137–147, 2002.
- [93] G. Milani: *3D upper bound limit analysis of multi-leaf masonry walls*. International Journal of Mechanical Sciences, 50(4):817–836, 2008.
- [94] G. Milani, P.B. Lourenço, e A. Tralli: *3D Homogenized limit analysis of masonry buildings subjected to horizontal loads*. In C. A. Mota Soares e et al. (editores): *III European Conference on Computational Mechanics - Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Lisbon, 2006.
- [95] G. Milani, P.B. Lourenço, e A. Tralli: *Homogenised limit analysis of masonry walls, Part II: Structural examples*. Computers and Structures, 84:181–195, 2006.

- [96] B.A. Murtagh e M.A. Saunders: *A Projected Lagrangean Algorithm and Its Implementation for Sparse Nonlinear Constraints*. Mathematical Programming Study, 16:84–117, 1982.
- [97] A. Muttoni, J. Schwartz, e B. Thurlimann: *Design of concrete structures with stress fields*. Birkhauser, 1997.
- [98] J.C. Nagtegaal, D.M. Parks, e J.R. Rice: *On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 4:153–177, 1974.
- [99] M.P. Nielsen: *Limit analysis and concrete plasticity*. CRC Press, 2ª edição, 1999.
- [100] J. Nocedal e S.J. Wright: *Numerical Optimization*. Springer series in operations research. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [101] A. Orduña e P.B. Lourenço: *Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages. Part I: Torsion failure on frictional interfaces and limit analysis formulation*. International Journal of Solids and Structures, 42:5140–5160, 2005.
- [102] J.A. Packer, G. Davies, e M.G. Coutie: *Ultimate strength of gapped joints in RHS trusses*. Journal of the Structural Division (ASCE), 108:411–431, 1982.
- [103] J. Pastor, T. H. Thai, e P. Francescato: *New bounds for the height limit of a vertical slope*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Volume 24, Issue 2 , Pages 165 - 182(2):165–182, 2000.
- [104] T.H.H. Pian: *A Historical Note About "Hybrid Elements"*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12:891–892, 1978.
- [105] S. Pissanetzky: *Sparse Matrix Technology*. Academic Press, Inc., London, 1984.
- [106] C. R. Rao e S.K. Mitra: *Generalized inverse of matrices and its applications*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, New York, 1971.
- [107] D.J. Rixen e C. Farhat: *A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems*.

- International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44(4):489–516, 1999.
- [108] D.J. Rixen, C. Farhat, R. Tezaur, e J. Mandel: *Theoretical comparison of the FETI and algebraically partitioned FETI methods, and performance comparisons with a direct sparse solver*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46:501–533, 1999.
- [109] Y. Saad e H.A. van der Vorst: *Iterative solution of linear systems in the 20th century*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 123(1-2):1–33, 2000.
- [110] J. Salençon: *Calcul à la rupture et Analyse Limite*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [111] J. Salençon: *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*. Les éditions de l'École Polytechnique, Paris, 1^a edição, 2002.
- [112] R. Salgado, A.V. Lyamin, S.W. Sloan, e H.S. Yu: *Two- and three-dimensional bearing capacity of foundations in clay*. Géotechnique, 54(5):297–306, 2004.
- [113] O. Schenk e K. Gärtner: *Parallel Sparse Direct Linear Solver - PARDISO, User's guide version 3.2*. Computer Science Department, University of Basel.
- [114] S.W. Sloan: *Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 12(1):61–77, 1988.
- [115] S.W. Sloan: *A FORTRAN program for profile and wavefront reduction*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28(11):2651–2679, 1989.
- [116] S.W. Sloan: *Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 13(3):263–282, 1989.
- [117] S.W. Sloan e P.W. Kleeman: *Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 127:293–314, 1995.

- [118] M. Snir, S. Otto, S. Huss-Lederman, D. Walker, e J. Dongarra: *MPI: The Complete Reference*. MIT Press, 1996.
- [119] C.K. Soh, T.K. Chan, e S.K. Yu: *Limit Analysis of Ultimate Strength of Tubular X-Joints*. Journal of Structural Engineering,, 126(7):790–797, 2000.
- [120] A.-H. Soubra e P. Regenass: *Three-Dimensional Passive Earth Pressures by Kinematical Approach*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 126(11):969–978, 2000.
- [121] D.J. Sutcliffe, H.S. Yu, e Page A.W.: *Lower bound limit analysis of unreinforced masonry shear walls*. Computers and Structures, 2001:1295–1312, 2001.
- [122] Karl Terzaghi: *Theoretical soil mechanics*. Wiley, New York, 1947.
- [123] S.P. Timoshenko e J.N. Goodier: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 3ª edição, 1982.
- [124] F. Tin-Loi e N.S. Ngo: *Performance of the p-version finite element method for limit analysis*. International Journal of Mechanical Sciences, 45:1149–1166, 2003.
- [125] A. Toselli e O. Widlund: *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, 2005.
- [126] M. Vicente da Silva e A. Antão: *Parallel processing applied to an upper bound formulation for 3D limit analysis computations*. In *8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8), 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008)*, Venice, Italy, 2008.
- [127] M. Vicente da Silva, A. Antão, e N. Guerra: *Determination of 3D active earth pressures of cohesionless soils based on numerical implementation of the kinematic theorem*. In J. P. Magnan e N. Droniuc (editores): *International Symposium on Ultimate Limit States of Geotechnical Structures (ELU/ULS 2006)*, páginas 291–298, Paris/Marne-la-Vallée, France, 2006. Presses de l'ENPC.
- [128] M. Vicente da Silva, A. Antão, e N. Guerra: *Numerical implementation of the kinematical theorem: Application to the determination of 3D passive earth pressures of cohesionless soils*. In E. Oñate e D.R.J. Owen (editores): *IX*

- Internatinal Conference on Computational Plasticity (COMPLAS)*, Barcelona, 2007.
- [129] M. Vicente da Silva e A. N. Antão: *A non-linear programming method approach for upper bound limit analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 72:1192–1218, 2007.
- [130] M. Vicente da Silva e A.N. Antão: *Upper bound limit analysis with a parallel mixed finite element formulation*. International Journal of Solids and Structures, 45(22-23):5788–5804, 2008.
- [131] S. Škrabl e B. Macuh: *Upper-bound solutions of three-dimensional passive earth pressures*. Canadian Geotechnical Journal, 42(12):1449–1460, 2005.
- [132] K. Ochi Y. Kurobane, K. Ogawa e Y. Makino: *Local Buckling of Braces in Tubular K-Joints*. Thin-Walled Structures, 4:23–40, 1986.
- [133] H.S. Yu, S.W. Sloan, e P.W. Kleeman: *A quadratic element for upper bound limit analysis*. Engineering Computations, 11(3):195–212, 1994.
- [134] X. L. Zhao: *Yield line mechanism analysis of steel members and connections*. Structural Analysis and CAD, 5(4):252–262, 2003.
- [135] M. Zhu e R.L. Michalowski: *Shape Factors for Limit Loads on Square and Rectangular Footings*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 131(2):223–231, 2005.
- [136] O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor: *The Finite Element Method*, volume 2 - Solid and Fluid Mechanics. Dynamics and Non-Linearity. McGraw-Hill, Inc., 4ª edição, 1997.
- [137] O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor: *The Finite Element Method*, volume 1 - Basic Formulation and Linear Problems. McGraw-Hill, Inc., 4ª edição, 1997.
- [138] O.C. Zienkiewicz e J.Z. Zhu: *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33(7):1331–1364, 1992.
- [139] N. Zouain, J. Herskovits, L.A. Borges, e R.A. Feijóo: *An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions*. International Journal of Solids and Structures, 30:1397–1417, 1993.